ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2006, том 408, № 3, с. 1–4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.951

# О СУММИРУЕМЫХ С КВАДРАТОМ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА НА МНОГООБРАЗИЯХ

© 2006 г. член-корреспондент РАН И. В. Волович, академик В. В. Козлов

Поступило 08.02.2006 г.

Обычно задачи на определение собственных значений и суммируемых с квадратом собственных функций рассматриваются для эллиптических уравнений. Здесь, следуя [1], рассмотрим такую задачу для гиперболического уравнения Клейна–Гордона на псевдоримановом многообразии. Будет построена бесконечная серия суммируемых с квадратом решений уравнения Клейна–Гордона на многообразиях типа Фридмана, в частности на пространстве де Ситтера. Этим решениям соответствуют дискретный спектр масс и конечное действие.

## 1. УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА–ГОРДОНА НА МНОГООБРАЗИИ

Пусть $M$ – $(n+1)$-мерное псевдориманово многообразие сигнатуры $(1, n)$ с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, n$. Рассмотрим уравнение Клейна–Гордона [2, 3] на $M$ для вещественной функции $f$

$$\Box f + \lambda f = 0. \tag{1}$$

Здесь

$$\Box f = \nabla_\mu \nabla^\mu f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu f),$$

$g$ – определитель матрицы $\|g_{\mu\nu}\|$, вещественный параметр $\lambda$ соответствует квадрату массы.

Ищем значения $\lambda$ и решения $f \in C^2(M)$, удовлетворяющие условию [1]

$$\int_M f^2 \sqrt{|g|} dx < \infty. \tag{2}$$

Это условие включает интегрирование не только по пространственным, как в [3], но также и по временной переменной в соответствии с их в определенном смысле равноправием в релятивистской теории.

Условие (2) тесно связано с условием конечности действия. Будет показано, что если решение на пространстве де Ситтера, а также в ряде других случаев удовлетворяет условию (2), то оно имеет конечное действие. Ранее были известны решения с конечным действием для евклидова времени для некоторых нелинейных уравнений эллиптического типа (инстантоны).

Дискретный спектр масс получен для уравнения Клейна–Гордона впервые в [1].

## 2. РЕШЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ ТИПА ФРИДМАНА

Рассмотрим многообразие вида $M = I \times N^n$ с метрическим тензором

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) dl^2. \tag{3}$$

Здесь $I$ – интервал на вещественной оси, $I \subset \mathbb{R}$, $a(t)$ – гладкая положительная функция на $I$, $N^n$ – риманово многообразие и

$$dl^2 = h_{ij}(y) dy^i dy^j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

$dl^2$ – риманова метрика на многообразии $N^n$. Такие многообразия $(M, g_{\mu\nu})$ будем называть многообразиями типа Фридмана. Уравнение (1) для метрики (3) принимает вид

$$\ddot{f} + \frac{n}{a}\dot{a}\dot{f} - \frac{1}{a^2}\Delta_h f + \lambda f = 0, \tag{5}$$

где $\Delta_h = h^{-1/2}\partial_i(h^{1/2}h_{ij}\partial_j)$ – оператор Лапласа–Бельтрами для метрики $h_{ij}$ условие (2) приводится к виду

$$\int_{I \times N^n} f^2 a^n \, dt \sqrt{h} \, dy < \infty. \tag{6}$$

Пусть $q \geq 0$ – собственное значение оператора $-\Delta_h$ на $N^n$, $\Phi = \Phi(y)$ – соответствующая собственная функция,

$$-\Delta_h \Phi = q\Phi, \quad \int_{N^n} \Phi^2 \sqrt{h} \, dy < \infty. \tag{7}$$

*Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва*

Положим

$$f = B(t)a(t)^{-\frac{n}{2}}\Phi(y). \quad (8)$$

Имеем уравнение Штурма–Лиувилля в $L^2(I)$

$$\ddot{B} + [\lambda - v(t)]B = 0, \quad (9)$$

где

$$v(t) = \frac{n\ddot{a}}{2a} + \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{q}{a^2}. \quad (10)$$

Теорема 1. *Пусть $M = \mathbb{R} \times N^n$ – многообразие типа Фридмана с метрическим тензором вида* (3), (4), *такое, что существует решение уравнения* (7) *на $N^n$ с собственным значением $q \geq 0$. пусть гладкая функция $a(t)$ на $\mathbb{R}$ такова, что*

$$v(t) \to \infty, \quad |t| \to \infty. \quad (11)$$

*Тогда при заданных $q$, $\Phi$* (7) *задача* (1), (2) *имеет бесконечное множество суммируемых с квадратом решений с собственными значениями $\lambda_1$, $\lambda_2$, …, причем $\lambda_j \to \infty, j \to \infty$.*

Пример 1.

$$a(t) = C\exp(\alpha t^{2k}), \quad C > 0, \quad \alpha > 0, \quad k > 1. \quad (12)$$

Тогда

$$v = \frac{n}{2}\left[\alpha \cdot 2k(2k-1)t^{2k-2} + \frac{n}{2}(\alpha \cdot 2k)^2 t^{4k-2}\right] - $$
$$- qC^{-2}\exp(-\alpha t^{2k}).$$

Условие (11) выполнено, имеется дискретный спектр $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, причем $\lambda_j \to \infty, j \to \infty$.

## 3. РЕШЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

Для пространства де Ситтера имеем $M = \mathbb{R} \times S^3$,

$$ds^2 = dt^2 - \mathrm{ch}^2 t \cdot h_{ij}(y)dy^i dy^j, \quad (13)$$

$h_{ij}$ – стандартная метрика на трехмерной евклидовой сфере $S^3$, собственные значения оператора $-\Delta_h$ равны $q = j(j + 2), j = 0, 1, 2,\ldots$,

$$v(t) = \frac{9}{4} - \left[\frac{3}{4} + j(j+2)\right]\frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}. \quad (14)$$

Положим

$$\alpha = \frac{3}{4} + j(j+2), \quad \nu^2 = \frac{9}{4} - \lambda, \quad (15)$$

Тогда уравнение (9) приобретает вид

$$\ddot{B} + \left[\frac{\alpha}{\mathrm{ch}^2 t} - \nu^2\right]B = 0. \quad (16)$$

Теория уравнения (16) хорошо известна [4, 5] и была использована в [1] для построения суммируемых с квадратом решений уравнения Клейна–Гордона на пространстве де Ситтера. Спектр положительных значений $\nu^2$ дискретен, а отрицательных непрерывен; рассматриваем первый, $\nu^2 > 0$.

Уравнение (16) при $\alpha > 0$ имеет решение из $L^2(\mathbb{R})$ только в том случае, если

$$0 < \nu = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 4\alpha} - 1) - n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (17)$$

В нашем случае, с учетом (15)

$$0 < \nu = j + \frac{1}{2} - n, \quad j, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Имеется серия квадратично-суммируемых решений уравнения (9) с собственными значениями $\lambda$ вида

$$\lambda_{jn} = \frac{9}{4} - \left(j + \frac{1}{2} - n\right)^2,$$
$$\left(j, n = 0, 1, 2, \ldots, j + \frac{1}{2} - n > 0\right). \quad (18)$$

Если $\lambda_{jn} > 0$, то мы должны иметь

$$0 < j + \frac{1}{2} - n \leq \frac{3}{2}, \quad j, n = 0, 1, 2, \ldots$$

откуда либо $j = n$ и $\lambda_{jn} = 2$, либо $j = n + 1$ и $\lambda_{jn} = 0$.

В случае $j = n$, $\nu = \frac{1}{2}$ для каждого значения $j = 0, 1, 2, \ldots$ уравнение (16) имеет решение в $L^2(\mathbb{R})$ вида

$$B_j(t) = \frac{1}{(\mathrm{ch}\,t)^{1/2}}\sum_{s=0}^{j}\frac{(-j)_s(j+2)_s}{\left(\frac{3}{2}\right)_s s!}\frac{1}{(e^{2t}+1)^s}, \quad (19)$$

$$k_0 = 1, \quad (k)_s = k(k+1)\ldots(k+s-1).$$

В случае $j = n + 1$, $\nu = \frac{3}{2}$ для каждого значения $j = 1, 2, \ldots$ уравнение (16) имеет решение в $L^2(\mathbb{R})$ вида

$$B_j(t) = \frac{1}{(\mathrm{ch}\,t)^{3/2}}\sum_{s=0}^{j-1}\frac{(1-j)_s(j+3)_s}{\left(\frac{5}{2}\right)_s s!}\frac{1}{(e^{2t}+1)^s}. \quad (20)$$

Обозначим $H_\lambda$ подпространство в $L^2(M)$, образованное квадратично-суммируемыми решениями уравнения (1).

Теорема 2 (см. [1]). *Пусть $M = \mathbb{R} \times S^3$ – пространство де Ситтера с метрическим тензором*

$$d\dot{s}^2 = st^2 - \mathrm{ch}^2 t \cdot h_{ij}(y) dy^i dy^j.$$

*Тогда*, $\dim H_\lambda = \infty$ *при всех* $\lambda = \lambda_{jn}$ (18). *При этом если* $\lambda = \lambda_{jn} \geq 0$, *то либо* $\lambda = 0$, *либо* $\lambda = 2$.

Пример 2. Принятая в космологии форма метрики Фридмана–де Ситтера, описывающая инфляционный период расширения Вселенной:

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht} h_{ij}(y) dy^i dy^j, \qquad (21)$$

где $h_{ij}$ – риманова метрика на трехмерном многообразии, $0 < t < \infty$, $0 < H$ – постоянная Хаббла. Получаем

$$v(t) = \frac{9}{4}H^2 - qe^{-2Ht}. \qquad (22)$$

Уравнение (9) на полуоси, с граничными условиями $B(0) = B(\infty) = 0$ имеет в этом случае собственное значение. Если параметр $t$ интерпретировать как длину в полярных координатах, то мы получаем известную модель дейтрона [5, с. 205]. Решение имеет вид

$$B(t) = J_\nu(ce^{-Ht}),$$

где

$$c = \frac{\sqrt{q}}{H} > 0, \quad \nu = \frac{\sqrt{9H^2 - 4\lambda}}{2H} > 0,$$

$J_\nu$ – функция Бесселя. Собственное значение $\lambda$ находится из соотношения $J_\nu(c) = 0$.

Пример 3. Метрика Фридмана имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 h_{ij}(y) dy^i dy^j, \qquad (23)$$

где $h_{ij}$ – риманова метрика на трехмерном многообразии постоянной положительной, отрицательной или нулевой кривизны. Функция $a(t)$ определяется из уравнений Эйнштейна–Фридмана

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho - \frac{3k}{a^2}, \quad \frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3p), \qquad (24)$$

где $k = 1, -1, 0$ для многообразий постоянной положительной, отрицательной или нулевой кривизны соответственно. Давление $p$ и плотность материи $\rho$ связаны некоторым уравнением состояния $p = f(\rho)$. В частности, для излучения $\left(p = \frac{\rho}{3}\right)$ в 3-х мерном торе ($k = 0$) имеем

$$a(t) = c\sqrt{t}, \quad c > 0, \quad 0 < t < \infty. \qquad (25)$$

В этом случае

$$v(t) = -\frac{3}{16t^2} - \frac{q}{c^2 t}, \quad q > 0, \qquad (26)$$

и уравнение Штурма–Лиувилля (9) имеет дискретный спектр при отрицательных $\lambda$:

$$\lambda_n = -\frac{4q^2}{c^4(4n+1)^2}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (27)$$

Для компактного 3-х мерного многообразия постоянной отрицательной кривизны ($k = -1$) функция $a(t)$ имеет вид

$$a(t) = \sqrt{t^2 - c^2}, \quad 0 < c < t < \infty, \qquad (28)$$

и соответствующая сингулярная задача Штурма–Лиувилля также имеет дискретный спектр при отрицательных $\lambda$.

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ

1. Действие для уравнения Клейна–Гордона имеет вид

$$S = \frac{1}{2}\int_M [(\nabla f, \nabla f) - \lambda f^2]\sqrt{|g|}dx. \qquad (29)$$

Здесь

$$(\nabla f, \nabla f) = g^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu f.$$

Для решений вида (8) на многообразиях типа Фридмана действие принимает вид

$$S = \frac{1}{2}\int_{I \times N^m} \left[\left(\dot{B} - \frac{n\dot{a}}{2a}\right)^2 \Phi^2 - a^{-2}B^2 h^{ij}\partial_i\Phi\partial_j\Phi - \right. \qquad (30)$$
$$\left. - \lambda B^2\Phi^2\right] dt\sqrt{h}\, dy.$$

На решениях на пространстве де Ситтера вида (19), (20) интеграл (30) сходится, т.е. действие конечно.

2. Сделаем в уравнении (5) замену

$$f = u(y, t)a(t)^{-\frac{n}{2}}.$$

Тогда получим уравнение

$$\ddot{u} - a(t)^{-2}\Delta_h u + [\lambda - w(t)]u = 0, \qquad (31)$$

где

$$w(t) = \frac{n\ddot{a}}{2a} + \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{\dot{a}^2}{a^2}.$$

Ищутся решения, удовлетворяющие условию

$$\int_{\mathbb{R} \times N^n} u(y, t)^2 dt\sqrt{h}\, dy < \infty.$$

Имеется детально разработанная спектральная теория для эллиптических дифференциальных операторов (см., например, [4]). Представляет интерес исследование спектральной теории для гиперболических уравнений.

Например, рассмотрим на пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^2)$функций $u = u(x, t)$ на плоскости гиперболический дифференциальный оператор вида

$$Au = \frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \phi(x, t)u, \qquad (32)$$

где гладкая вещественная функция $\phi(x, t)$ имеет на бесконечности рост по $x$, $t$ не выше степенного. Оператор $A$ может быть расширен с пространства Шварца до самосопряженного оператора в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$. Если функция $\phi$ имеет вид $\phi = x^2 - t^2$, то оператор $A$ есть разность операторов Шредингера для двух гармонических осцилляторов. Поэтому $A$ имеет в $L^2(\mathbb{R}^2)$ полную систему собственных функций вида

$$\begin{gathered} u_{jn} = H_j(t)H_n(x)\exp\left\{-\frac{1}{2}(t^2 + x^2)\right\}, \\ Au_{jn} = \lambda_{jn}u_{jn}, \quad j, n = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \qquad (33)$$

с соответствующими собственными значениями $\lambda_{jn} = 2(n - j)$. Здесь $H_j$ – полиномы Эрмита.

Действие

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} (\dot{u}^2 - u_x^2 - \phi u^2 + \lambda u^2)dt\, dx$$

конечно на решениях (33).

3. Отметим, что наряду с (1) рассматривается также так называемое уравнение с конформной связью

$$\Box f + \xi Rf + \lambda f = 0, \qquad (34)$$

где $R$ – скалярная кривизна многообразия $M$, $\xi = \frac{n-1}{4n}$. Для пространства де Ситтера $R = 12$, $\xi = \frac{1}{6}$. В этом случае уравнение (34) $\Box f + (2 + \lambda)f = 0$ имеет при $2 + \lambda = \lambda_{jn}$ (18) и, в частности, при $\lambda = 0$ суммируемые с квадратом решения.

Здесь были рассмотрены суммируемые с квадратом решения уравнения Клейна– Гордона для скалярного поля на многообразиях типа Фридмана. Было бы интересно провести аналогичное исследование на многообразиях более общего вида, а также для полей с высшими спинами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов В.В.* // УМН. 1987. Т. 42. В. 4. С. 171.
2. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
3. *Биррелл Н., Девис П.* Квантованные поля в искривленном пространстве–времени. М.: Мир, 1984.
4. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: Из-во иностр. лит., 1960. Т. 112.
5. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. М.: Мир, 1974. Т. 1.