УДК 517.2

О ВЕСОВЫХ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ СЛАБОЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. В. Козлов, Т. Мадсен, А. А. Сорокин

1. Средние Рисса. Наша цель — обобщить и несколько усилить классический результат С. Н. Бернштейна [1] о законе больших чисел для слабо коррелированных случайных величин. Напомним сначала теорему Бернштейна.

Рассматривается последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$. Эти величины не предполагаются независимыми, и поэтому их попарные ковариации $R_{i,j} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = E(\xi_i \xi_j)$, вообще говоря, отличны от нуля. Теорема Бернштейна утверждает, что если

1) дисперсии σ_n^2 ограничены,

2) $|R_{i,j}| \leqslant \varphi(|i-j|)$, причем $\varphi(m) \to 0$ при $m \to \infty$,

то для любого $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{\Big|\frac{\xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_n}{n+1}\Big| \geqslant \varepsilon\Big\} \to 0 \tag{1}$$

при $n \to \infty$.

Условия 1 и 2 можно несколько ослабить, заменив их следующими:

$$\sigma_0^2 + \ldots + \sigma_n^2 = o(n^2), \tag{2}$$

$$[\varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n)]/(n+1) \to 0 \text{ при } n \to 0. \tag{3}$$

Итак, из (2) и (3) следует (1). Именно это утверждение мы и собираемся обобщить.

Основная идея обобщения состоит в замене средних арифметических в (1) весовыми средними более общего вида:

$$\frac{p_0 s_0 + p_1 s_1 + \ldots + p_n s_n}{p_0 + \ldots + p_n}. \tag{4}$$

Здесь $p_j \geqslant 0$ и $\sum p_j = \infty$. Такие средние часто называются средними Рисса. С ними связан метод суммирования: если последовательность (4) при $n \to \infty$ сходится к s, то говорят, что $s_n \to s(R, p_n)$. Этот метод линеен и регулярен (теорию см., например, в [2]). При $p_0 = p_1 = \ldots$ средние (4) превращаются в обычные средние арифметические. Будем предполагать дополнительно, что

$$\frac{p_n}{p_0 + \ldots + p_n} \to 0 \tag{5}$$

при $n \to \infty$. Это условие естественно: если, напротив, отношения в (5) отделены от нуля, то (R, p_n)-сходимость эквивалентна обычной сходимости. Однако с точки зрения закона больших чисел обычной сходимости явно недостаточно.

Наш основной результат составляет

Теорема 1. *Если*

$$\frac{p_0^2\sigma_0^2 + p_1^2\sigma_1^2 + \ldots + p_n^2\sigma_n^2}{(p_0 + p_1 + \ldots + p_n)^2} \to 0 \tag{6}$$

и

$$\frac{p_0 R_{0,n+1} + p_1 R_{1,n+1} + \ldots + p_n R_{n,n+1}}{p_0 + p_1 + \ldots + p_n} \to 0, \tag{7}$$

то для любого $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{\Big|\frac{p_0\xi_0 + p_1\xi_1 + \ldots + p_n\xi_n}{p_0 + p_1 + \ldots + p_n}\Big| \geqslant \varepsilon\Big\} \to 0 \tag{8}$$

при $n \to \infty$.

Условие (6) можно заменить более простым:

$$\frac{\sigma_n^2 p_n}{p_0 + \ldots + p_n} \to 0. \tag{9}$$

Более точно, с помощью теоремы Штольца и предположения (5) легко доказать, что из (9) следует (6).

С другой стороны, предполагая, что $|R_{i,j}| \leqslant \varphi(|i-j|)$, условие (7) можно представить в более простом и универсальном виде:

$$\frac{p_0\varphi(n+1)+p_1\varphi(n)+\ldots+p_n\varphi(1)}{p_0+p_1+\ldots+p_n} \to 0. \tag{10}$$

Средние такого вида часто называются средними Вороного, и (10) принято обозначать так: $\varphi(n+1) \to 0\ (W,p_n)$. Условие (5) — критерий регулярности (W,p_n)-метода. В частности, если $\varphi(n)\to 0$, то заведомо выполнено (10) и, следовательно, (7).

Что нового дает теорема 1? Классическое условие (2) означает, что дисперсии σ_n^2 могут расти медленнее n; точнее, если $\sigma_n^2 = o(n)$, то имеет место (2). Если же $\sigma_n^2 = cn\ (c = \mathrm{const} > 0)$, то (2) не выполняется и хорошо известно, что в этом случае закон больших чисел (1), вообще говоря, несправедлив даже для независимых случайных величин (см. по этому поводу [3, гл. X]).

Положим $p_{n-1} = 1/n\ (n \geqslant 1)$. Тогда соотношение (9) принимает вид $\sigma_n^2 = o(n\ln n)$. В частности, дисперсии могут линейно расти вместе с n и мы имеем дело с законом больших чисел в форме (8), если, конечно, ковариации $R_{i,j}$ равномерно по $|i-j|$ стремятся к нулю (или, более общо, справедливо условие (7) с весовыми коэффициентами $p_{n-1} = 1/n$).

Это наблюдение можно обобщить. Пусть $l_m(x)$ — итерированный натуральный логарифм: $l_1 = \ln$, $l_2 = \ln(\ln), \ldots$. Если $\sigma_n^2 = o(nl_1(n)l_2(n)\ldots l_m(n))$ и $\varphi(n)\to 0$, то имеет место (8) с весовыми коэффициентами

$$p_n = [nl_1(n)\ldots l_{m+1}(n)]^{-1}. \tag{11}$$

Следует иметь в виду, что сила такого (R,p_n)-метода возрастает с ростом m. И наоборот, сила соответствующего (W,p_n)-метода убывает. Тем не менее соотношение (10) заведомо выполнено, если $\varphi(n)\to 0$ (благодаря свойству (5)).

Идея обобщения закона больших чисел с использованием методов суммирования, отличных от метода Чезаро, конечно, не нова. Упомянем работы [4, 5], а также [6, 7], где закон больших чисел (в том числе и усиленный) обсуждается с точки зрения эргодической теории. В этих работах можно найти дальнейшие ссылки. Новизна нашего подхода состоит в том, что рассматривается случай слабозависимых случайных величин и условия сходимости самих случайных величин и их ковариаций оказались естественным образом связанными с суммируемостью двумя "двойственными" методами Рисса и Вороного. Кроме того, (R,p_n)-методы, определяемые последовательностью (11), не удовлетворяют условиям, которые принимаются в [4, 5].

2. Доказательство основной теоремы. Доказательство теоремы 1 опирается на неравенство Чебышева

$$P(|X|\geqslant\varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2},$$

где $\sigma^2(X)$ — дисперсия случайной величины X с нулевым математическим ожиданием. Полагая

$$X = \frac{p_0\xi_0+p_1\xi_1+\ldots+p_n\xi_n}{p_0+\ldots+p_n},$$

получаем формулу для дисперсии

$$\sigma^2(X) = \frac{\sum p_k^2\sigma_k^2}{(\sum p_k)^2} + \frac{2\sum\limits_{i<j} p_ip_jR_{i,j}}{(\sum p_k)^2}. \tag{12}$$

Необходимо проверить, что эта сумма стремится к нулю, когда $n\to\infty$. Первое слагаемое стремится к нулю согласно (6). Так как $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k \to \infty$, то для вычисления предела второй суммы в (12) можно воспользоваться теоремой Штольца:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2p_{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} p_kR_{k,n+1}}{(\sum\limits_{k=0}^{n+1} p_k)^2-(\sum\limits_{k=0}^{n} p_k)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sum\limits_{k=0}^{n} p_kR_{k,n+1}}{2(p_0+\ldots+p_n)+p_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} p_kR_{k,n+1}}{p_0+\ldots+p_n} = 0$$

согласно (7), что и требовалось.

3. Средние Вороного. Сформулируем аналог теоремы 1, когда средние Рисса заменяются средними Вороного. Вообще, в задачах подобного рода метод Вороного более предпочтителен, поскольку любые два регулярных метода Вороного совместны: если $s_n \to s(W, p_n)$ и $s_n \to s'(W, p'_n)$, то $s' = s$. Отметим, что разные методы могут суммировать одну и ту же последовательность к разным пределам (см. [2]).

Теорема 2. *Если*

$$\frac{p_0^2\sigma_n^2 + p_1^2\sigma_{n-1}^2 + \ldots + p_n^2\sigma_0^2}{(p_0 + \ldots + p_n)^2} \to 0 \tag{13}$$

и

$$\varphi(n) \to 0(W, p_n), \tag{14}$$

то для любого $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{\Big|\frac{p_0\xi_n + p_1\xi_{n-1} + \ldots + p_n\xi_0}{p_0 + \ldots + p_n}\Big| \geqslant \varepsilon\Big\} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Это утверждение доказывается так же, как и теорема 1. К сожалению, условие (14) нельзя заменить более общим условием типа (7), которое содержит только ковариации $R_{0,n+1}, \ldots, R_{n,n+1}$.

К обсуждаемому кругу вопросов можно подойти с иной стороны. Рассмотрим случай, когда $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \ldots$ (например, случайные величины $\xi_0, \xi_1, \ldots$ одинаково распределены, но зависимы). Тогда условия (6) и (13) заведомо выполнены ввиду предположения (5) (опять-таки по теореме Штольца). Можно рассмотреть случай, когда p_n монотонно возрастает и при этом остается справедливым соотношение (5). Примером служит последовательность $p_n = \exp n^\alpha$, где $0 < \alpha < 1$. С ростом α "сила" соответствующих (W, p_n)-методов возрастает и поэтому мы будем иметь все более слабые условия на убывание ковариаций $\varphi(n)$. С другой стороны, сила $(R, \exp n^\alpha)$-методов убывает и при $\alpha \to 1$ эти методы неограниченно приближаются к обычной сходимости. Но тогда сходимость по вероятности средних Рисса для случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ к нулю будет более тонким (а следовательно, и более глубоким) фактом.

4. О возможной скорости возрастания дисперсий. Как отмечено в п. 1, если

$$\sigma_n^2 = nl_1(n)\ldots l_m(n) \tag{15}$$

(l_k — итерированный логарифм) и $\varphi(n) \to 0$, то дисперсия случайной величины $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k\xi_k / \sum\limits_{k=0}^{n} p_k$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Спрашивается: справедливо ли данное свойство в тех случаях, когда последовательность дисперсий σ_n^2 возрастает быстрее (15) (например, когда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} \tag{16}$$

сходится)? Ответ оказывается отрицательным даже для *независимых* случайных величин. Действительно, ввиду неравенства

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k^2\sigma_k^2}{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k^2} \geqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \sigma_k^{-2}}$$

ряд (16) расходится, так как левая часть этого неравенства стремится к нулю согласно предположению.

Мы рассмотрим поставленный вопрос для более общих *регулярных* матричных методов суммирования $T = (t_{ij})$ (к которым относятся методы Рисса и Вороного). Пусть $\eta_n = \sum\limits_{j=0}^{\infty} t_{nj}\xi_j$, где $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность *независимых* случайных величин с нулевыми средними и ненулевыми дисперсиями $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \ldots$. Предполагается, что случайные величины η_n имеют конечные дисперсии

$$D(\eta_n) = \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}^2\sigma_j^2 \tag{17}$$

(эти ряды сходятся для всех $n \geqslant 0$).

Теорема 3. *Ряд* (16) *расходится тогда и только тогда, когда существует регулярный матричный метод с неотрицательными* t_{ij}, *такой, что последовательность дисперсий* (17) *стремится к нулю.*

Действительно, по неравенству Коши

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}^2\Big)^2 \Big/ \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}^2 \sigma_j^2 \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_j^2}. \tag{18}$$

Так как метод (t_{ij}) регулярен, то (по теореме Теплица [2]) ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} t_{nj}$ сходится при всех n и при $n \to \infty$ эта сумма стремится к единице. Поскольку $D(\eta_n) \to 0$, левая часть (18) стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Следовательно, ряд (16) расходится.

Обратно, пусть ряд (16) расходится. Тогда для любого целого $n \geqslant 0$ величина $M_n = \min\Big\{M : \sum\limits_{j=n}^{M} \frac{1}{\sigma_j^2} \geqslant n\Big\}$ конечна. Положим

$$S_n = \sum_{j=n}^{M} \frac{1}{\sigma_j^2}. \tag{19}$$

Ясно, что $S_n \geqslant n$. Рассмотрим следующий матричный метод суммирования: $t_{nj} = (S_n \sigma_j^2)^{-1}$, если $n \leqslant j \leqslant M_n$, и $t_{nj} = 0$ в противном случае. Этот метод регулярен. Действительно,

$$\sum t_{nj} = \frac{1}{S_n} \sum_{j=n}^{M} \frac{1}{\sigma_j^2} = 1$$

ввиду (19) и определения t_{nj}. Далее, $t_{nj} \leqslant \frac{1}{n\sigma_j^2}$. Следовательно, $t_{nj} \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого j. Остается применить критерий регулярности Теплица [2].

Наконец,

$$D(\eta_n) = \Big(\sum_{j=n}^{M} \frac{1}{\sigma_j^2}\Big)^{-2} \sum_{j=n}^{M} \sigma_j^2 \frac{1}{\sigma_j^4} = \Big(\sum_{j=n}^{M} \frac{1}{\sigma_j^2}\Big)^{-1} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Откуда $D(\eta_n) \to 0$, что и требовалось.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 01-01-22004 и гранта программы “Ведущие научные школы” № НШ-136.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн С.Н.* О законе больших чисел // Сообщ. Харьков. матем. о-ва. Сер. 2. 1918. **16**. 82–87.
2. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. М.: Мир, 1984.
4. *Frank W.E., Hanson D.L.* Some results giving rates of convergence in the law of large numbers for weighted sums of independent random variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. **124**, N 2. 347–359.
5. *Hanson D.L., Wright F.T.* Some convergence results for weighted sums of independent random variables // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. 1971. **19**. 81–89.
6. *Krengel U.* Ergodic Theorems. Berlin: Walter de Gruyter, 1985.
7. *Козлов В.В.* Суммирование расходящихся рядов и эргодические теоремы // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. 2002. **22**. 142–168.

Поступила в редакцию
17.03.04