

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются системы с конечным числом степеней свободы, потенциальная энергия которых есть конечная сумма экспонент с чисто мнимыми или вещественными показателями. К таким системам относятся обобщенные цепочки Тоды и системы с торическим конфигурационным пространством. Рассматривается задача описания всех квантовых законов сохранения, т.е. дифференциальных операторов, полиномиальных относительно дифференцирований и коммутирующих с оператором Гамильтона. Доказано, что в случае, если спектр потенциальной энергии инвариантен при отражении относительно начала координат, то такие нетривиальные операторы существуют только тогда, когда рассматриваемая система распадается в прямую сумму несвязанных подсистем. В общей ситуации (без предположения о симметрии спектра) доказано, что из наличия полного набора независимых законов сохранения следует полная интегрируемость соответствующей классической системы.

Ключевые слова: оператор Гамильтона, полиномиальный дифференциальный оператор, система с экспоненциальным взаимодействием, спектр потенциала.

1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ – обобщенные координаты, $p = (p_1, \dots, p_n)$ – сопряженные им канонические импульсы классической гамильтоновой системы. Пусть ϑ – симметричная вещественная квадратная матрица размера $n \times n$. Ей соответствует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в пространстве импульсов $\mathbb{R}^n = \{p\}$:

$$\langle p', p'' \rangle = \sum_{j,l=1}^n \vartheta_{jl} p'_j p''_l, \quad p', p'' \in \mathbb{R}^n.$$

Положим

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial = (\partial_1, \dots, \partial_n).$$

Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка $\Theta = \langle \partial, \partial \rangle$. Если матрица ϑ единичная, то $\Theta = \Delta$ – оператор Лапласа. Далее $-\Theta$ отождествляем с кинетической

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: dtresch@mech.math.msu.su

энергией некоторой квантовой системы. Для простоты записи постоянную Планка мы положили равной единице. В общем случае матрица Θ не предполагается ни положительно определенной, ни даже невырожденной.

Рассмотрим также потенциальную энергию \hat{v} – оператор умножения на функцию

$$v = \sum_{k \in \mathfrak{M}} v^k e^{(k,x)},$$

где $\mathfrak{M} \subset \mathbb{C}^n$ – конечное множество (спектр потенциала), а $(k, x) = \sum k_j x_j$ – операция свертки ковектора k и вектора x , представленных в сопряженных базисах, v^k – комплексные числа.

Оператором Гамильтона назовем оператор

$$\hat{H} = -\Theta + \hat{v}. \tag{1.1}$$

Этот оператор получается из классического гамильтониана $\langle p, p \rangle + v$ применением операции квантования

$$x, p \mapsto \hat{x}, -\frac{i\partial}{\partial x}.$$

Наша основная задача – найти оператор

$$\hat{F}(x, \partial) = \sum_{|\mu| \leq M} f_\mu(x) \partial^\mu, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \mu &= (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_+^n = \{0, 1, 2, \dots\}, \\ |\mu| &= \mu_1 + \dots + \mu_n, \quad \partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} \times \dots \times \partial_n^{\mu_n}, \end{aligned}$$

$$f_\mu = \sum_k f_\mu^k e^{(k,x)}, \tag{1.3}$$

коммутирующий с \hat{H} :

$$[\hat{F}, \hat{H}] = 0, \tag{1.4}$$

где $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A} \circ \hat{B} - \hat{B} \circ \hat{A}$, \circ – символ композиции операторов. Оператор, коммутирующий с оператором Гамильтона, назовем квантовым первым интегралом.

В квантовой механике обычно рассматривают эрмитовы дифференциальные операторы. Хорошо известно, что если $[\hat{H}, \hat{F}] = 0$, то среднее значение эрмитова оператора \hat{F} в любом состоянии не зависит от времени:

$$\frac{d}{dt} \int \bar{\psi} \hat{F} \psi dx_1 \dots dx_n = 0$$

для любой волновой функции ψ , удовлетворяющей уравнению Шредингера $i\partial\psi/\partial t = \hat{H}\psi$. Таким образом, любой эрмитов дифференциальный оператор, коммутирующий с оператором Гамильтона, порождает закон сохранения.

Ниже рассматривается общая задача о коммутирующих операторах и не предполагается, что оператор \widehat{F} эрмитов.

Наиболее интересны следующие два случая:

а) $\Theta = \Delta$, $\mathfrak{M} = -\mathfrak{M} \subset i\mathbb{Z}^n$, $v^k = \bar{v}^{-k}$ – этот случай отвечает натуральной системе на торе (можно считать, что $x \in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z}^n)$), потенциал которой – тригонометрический полином;

б) $\Theta = \Delta$, $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^n$, $v^k \in \mathbb{R}$ – здесь мы имеем дело с квантовыми обобщенными цепочками Тоды.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. А. В случаях “а” и “б” оператор \widehat{H} вещественный.

Б. Случай “а” сводится к случаю “б” заменой

$$x \mapsto ix, \quad \mathfrak{M} \mapsto i\mathfrak{M}, \quad v \mapsto -v, \quad \widehat{H} \mapsto -\widehat{H}.$$

Таким образом, далее все объекты вещественные.

В. Ортогональной заменой координат x можно привести матрицу ϑ к диагональному виду. Далее путем растяжения можно добиться, чтобы на диагонали матрицы ϑ стояли ± 1 или нули. Поэтому в случае положительно определенной матрицы ϑ можно считать, что $\Theta = \Delta$.

Г. Нас интересуют лишь нетривиальные решения уравнения (1.4):

$$\widehat{F} \neq \sum_s c_s \widehat{H}^s, \quad s \in \{0, 1, \dots\}, \quad c_s = \text{const}. \quad (1.5)$$

Однородный по переменной p многочлен

$$F_{(M)} = \sum_{|\mu|=M} f_\mu(x) p^\mu$$

называется старшим символом оператора \widehat{F} .

2. СЛУЧАЙ СИММЕТРИЧНОГО СПЕКТРА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Назовем спектр \mathfrak{M} *разделяющимся*, если $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1 \perp \mathfrak{M}_2$, причем ни \mathfrak{M}_1 , ни \mathfrak{M}_2 не порождают \mathbb{R}^n . Ортогональность понимается в смысле метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Отметим, что данному определению удовлетворяет спектр, лежащий в линейном подпространстве положительной коразмерности. В этом случае одно из множеств \mathfrak{M}_j пусто.

Если спектр разделяется, то система имеет дополнительный квадратичный по ∂ интеграл. В этом случае оператор Гамильтона \widehat{H} разлагается в сумму операторов $\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2$ вида (1.1), которые являются операторами Гамильтона отдельных подсистем исходной квантовой системы. Поскольку $[\widehat{H}_1, \widehat{H}_2] = 0$, то $[\widehat{H}, \widehat{H}_1] = [\widehat{H}, \widehat{H}_2] = 0$.

Если одно из множеств \mathfrak{M}_j пусто, то, очевидно, система имеет линейный по ∂ интеграл.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть матрица ϑ положительно или отрицательно определена, $\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}$ и имеется нетривиальный в смысле (1.5) интеграл \widehat{F} . Тогда спектр разделяется.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если оператор Гамильтона (1.1) со знакоопределенной матрицей ϑ и симметричным спектром допускает нетривиальный полиномиальный коммутирующий с \widehat{H} оператор, то найдется нетривиальный полиномиальный по ϑ оператор, коммутирующий с \widehat{H} , степень которого не превосходит двух.

Действительно, если спектр не разделяется, то нетривиальных коммутирующих операторов вообще нет. Наоборот, если спектр разделяется, то (как было отмечено выше) имеется либо квадратичный, либо линейный относительно дифференцирования оператор, коммутирующий с \widehat{H} .

По-видимому, верно и более общее утверждение. Оператор Гамильтона (1.1) со знакоопределенной матрицей ϑ и симметричным спектром имеет $l \leq n$ независимых интегралов тогда и только тогда, когда спектр \mathfrak{M} разделяется на l ортогональных частей, т.е.

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{M}_l, \quad \mathfrak{M}_j \perp \mathfrak{M}_s, \quad j, s = 1, \dots, l,$$

причем ни одно из множеств $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_j$ не порождает \mathbb{R}^n .

ПРИМЕР 2.1. Применим эти результаты к квантовой задаче о движении n идентичных частиц по окружности $\{x \bmod 2\pi\}$, попарно взаимодействующих друг с другом. Их динамика описывается оператором Гамильтона (1.1), где $\Theta = \Delta/(2\mu)$ (μ – масса частиц) и

$$v = \sum_{i < j} f(x_i - x_j). \tag{2.1}$$

Будем считать потенциал f парного взаимодействия тригонометрическим многочленом:

$$f(z) = \sum_{|m| \leq N} f_m e^{imz}, \quad f_N \neq 0, \quad N \geq 1. \tag{2.2}$$

Можно считать, что частицы движутся по прямой $\mathbb{R} = \{x\}$ с периодическим парным потенциалом.

Ясно, что ввиду трансляционной симметрии кроме полной энергии \widehat{H} эта система всегда допускает интеграл импульса $\widehat{\Phi} = \sum \partial_j$. Так что речь может идти об условиях существования дополнительного полиномиального оператора, независимого от \widehat{H} , $\widehat{\Phi}$ и коммутирующего с этими операторами. Используя интеграл импульса, можно было бы понизить число степеней свободы на единицу (перейдя, например, в барицентрическую систему отсчета). Однако мы не будем этого делать отчасти из-за желания сохранить симметрию оператора Гамильтона по отношению к координатам x_1, \dots, x_n .

Спектр \mathfrak{M} потенциала (2.1) состоит из точек вида $(0, \dots, l, \dots, -l, \dots, 0)$, где $|l| \leq N$. Все они лежат в одной гиперплоскости Π , проходящей через начало координат. Это свойство – отражение факта существования линейного интеграла $\widehat{\Phi}$.

Легко заметить, что $n - 1$ точек спектра

$$(N, -N, 0, \dots, 0), \quad (N, 0, -N, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad (N, 0, 0, \dots, -N)$$

линейно независимы (как векторы \mathbb{Z}^n) и их попарные скалярные произведения положительны. Следовательно, спектр \mathfrak{M} не разделяется на гиперплоскости Π и согласно теореме 2.1 рассматриваемая система взаимодействующих частиц не допускает новых полиномиальных операторов, коммутирующих с \hat{H} и $\hat{\Phi}$.

Отметим, что классический вариант задачи о движении взаимодействующих частиц с потенциалом (2.1), (2.2) также не допускает дополнительного интеграла в виде полинома по импульсам, независимого от интегралов энергии и суммарного импульса. Это установлено в [1] (добавление 6) с помощью техники, развитой в работе [2] и основанной на классической схеме теории возмущений.

В работе [3] высказано предположение, что теорема 2.1, а также следствие 2.1 справедливы и для классических многомерных гамильтоновых систем. Там же указаны достаточные условия (в терминах геометрии выпуклой оболочки спектра) отсутствия дополнительного полиномиального по импульсам первого интеграла, основанные на методе работы [2]. Развиваемый ниже метод, по-видимому, позволяет доказать гипотезу работы [3] в полном объеме.

Доказательство теоремы 2.1 состоит из двух частей: аналитической (разделы 4–7) и геометрической (разделы 8–10). Аналитическая часть представляет собой анализ равенства (1.4). Ее главный результат – доказательство основной леммы, формулируемой ниже. Геометрическая часть – это использование основной леммы для доказательства теоремы 2.1. Указанные две части независимы, так что при желании можно сначала прочитать доказательство теоремы, а затем доказательство основной леммы.

Перейдем к формулировке основной леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Назовем $\alpha \in \mathfrak{M}$ *вершиной спектра*, если для любого натурального j и любых $k_1, \dots, k_j \in \mathfrak{M}$ равенство $j\alpha = k_1 + \dots + k_j$ возможно лишь в случае $k_1 = \dots = k_j = \alpha$.

Очевидно, если $\alpha \neq 0$ – вершина многогранника, являющегося выпуклой оболочкой $\mathfrak{M} \cup \{0\}$, то α – вершина \mathfrak{M} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}$ – вершина спектра. Вектор $\beta \in \mathfrak{M}$, $\beta \neq \alpha$, назовем *присоединенным* к α , если для любого $j \in \mathbb{N}$ и любых $k_0, k_1, \dots, k_j \in \mathfrak{M}$ равенство $j\alpha + \beta = k_0 + \dots + k_j$ возможно лишь в случае, когда один из векторов k_l , $l = 0, \dots, j$, равен β , а остальные векторы равны α .

Каждому вектору $k \in \mathbb{R}^n$ сопоставим дифференциальный оператор

$$D_k = \left(k, \frac{\partial}{\partial p} \right) \equiv \sum_{j=1}^n k_j \frac{\partial}{\partial p_j}.$$

Пусть $G(\vartheta) \subset GL(n, \mathbb{R})$ – группа преобразований, сохраняющих ориентацию на \mathbb{R}^n и (вообще говоря, индефинитную) метрику ϑ . Если метрика ϑ стандартная евклидова, то $G(\vartheta) = SO(n)$.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть α и β – линейно независимые вершина и присоединенный к ней вектор такие, что

$$-2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \notin \mathbb{Z}_+. \quad (2.3)$$

Пусть $g(\alpha, \beta) \subset G(\vartheta)$ – группа, образованная всеми преобразованиями из $G(\vartheta)$, оставляющими неподвижными векторы, ортогональные плоскости, натянутой на α и β . Тогда $F_{(M)}$ сохраняется при действии $g(\alpha, \beta)$ на \mathbb{R}^n .

Если α – изотропный вектор ($\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$), то условие (2.3) следует заменить на следующее: $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть спектр содержит α и β такие, как в условиях основной леммы. Пусть $\widehat{F}^{(1)}, \dots, \widehat{F}^{(n)}$ – первые интегралы. Тогда их старшие символы $F_{(M_1)}^{(1)}, \dots, F_{(M_n)}^{(n)}$ тождественно зависят.

Доказательство следствия 2.2 основано на двух простых фактах.

1. Старший символ первого интеграла не зависит от x (см. предложение 4.2 ниже).
2. Производная любой функции $F_{(M_j)}^{(j)} = F_{(M_j)}^{(j)}(p)$ вдоль векторного поля, касательного к орбитам действия $g(\alpha, \beta)$ на \mathbb{R}^n , равна нулю.

3. ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ С ПОЛНЫМ НАБОРОМ КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Следствие 2.2 из основной леммы позволяет дать исчерпывающую классификацию квантовых n -мерных систем с экспоненциальным взаимодействием (к таким системам, в частности, относятся цепочки Тоды и их обобщения [4]), которые могут допускать n попарно коммутирующих полиномиальных по ∂ дифференциальных операторов, старшие символы которых функционально независимы. Такие наборы операторов можно назвать полными. Дело в том, что не существует новых операторов, коммутирующих с оператором Гамильтона, у которых старшие символы не зависят от старших символов уже имеющихся n коммутирующих операторов. Действительно, старший символ оператора, коммутирующего с оператором Гамильтона, зависит лишь от n переменных p_1, \dots, p_n (см. ниже предложение 4.2).

Классический аналог указанной задачи широко обсуждался в литературе. Помимо уже упомянутых работ [4] отметим также статьи [5], в которых получен ряд интегрируемых обобщений стандартных цепочек Тоды. Окончательная классификация классических интегрируемых обобщенных цепочек Тоды получена в работе [6].

Задача о нахождении квантовых систем, допускающих полный набор независимых интегралов (законов сохранения), хорошо известна (см., например, [7] и приведенную там литературу). Естественно полагать, что такие системы редки и, в определенном смысле, более регулярны по сравнению с системами общего вида.

Верна следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть квантовая система с экспоненциальным взаимодействием обладает полным набором попарно коммутирующих полиномиальных по ∂ дифференциальных операторов. Тогда соответствующая классическая система интегрируема, т.е. обладает полным набором попарно коммутирующих полиномиальных по импульсам первых интегралов.

Искомая классификация основана на применении соотношений

$$-2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (3.1)$$

где α – любая вершина спектра системы и β – присоединенный к ней вектор (см. основную лемму). Задача об описании спектров \mathcal{M} со свойством (3.1) решена в работе [6] в связи с классификацией вполне интегрируемых классических гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием. Дискретные серии возможных спектров для неприводимых систем с $n \geq 2$ степенями свободы определяются своими *диаграммами Дынкина*. Эти диаграммы приведены в [6]. Они получаются из диаграмм простых корней градуированных алгебр Каца–Мули добавлением векторов, сонаправленных с некоторыми уже имеющимися. Добавленные векторы либо в два раза длиннее, либо в два раза короче сонаправленных с ними корневых векторов.

Вопрос о *достаточности* условий (3.1) для существования полного набора независимых полиномиальных коммутирующих операторов квантовых систем с экспоненциальным взаимодействием остается открытым. Для обычных цепочек Тоды он имеет положительное решение.

ПРИМЕР 3.1. Замкнутая квантовая цепочка Тоды из трех частиц допускает три независимых самосопряженных коммутирующих оператора:

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= -\frac{1}{2}(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) + e^{x_1 - x_2} + e^{x_2 - x_3} + e^{x_3 - x_1}, \\ \widehat{I} &= i(\partial_1 + \partial_2 + \partial_3), \\ \widehat{F} &= i\partial_1\partial_2\partial_3 + ie^{x_2 - x_3}\partial_1 + ie^{x_3 - x_1}\partial_2 + ie^{x_1 - x_2}\partial_3. \end{aligned}$$

Соотношения $[\widehat{H}, \widehat{I}] = [\widehat{F}, \widehat{I}] = [\widehat{H}, \widehat{F}] = 0$ проверяются прямым вычислением.

Отметим, что к настоящему времени полная спектральная теория разработана лишь для *незамкнутых* цепочек Тоды (см. обзор [8], а также [9]).

4. СИМВОЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Форму (1.2) записи дифференциального оператора будем называть *стандартной*. Характерной чертой такой формы является то, что все дифференцирования отнесены вправо. Ясно, что любой дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами можно представить в стандартной форме.

Любому оператору \widehat{F} вида (1.2) сопоставим его символ,

$$\widehat{F}(x, \partial) \mapsto F(x, p) = \text{symb}(\widehat{F}(x, \partial)), \quad p \in \mathbb{C}^n,$$

где F – многочлен относительно p вида

$$F(x, p) = \sum_{|\mu| \leq M} f_\mu(x) p^\mu. \quad (4.1)$$

В литературе F часто называется левым (или xp -) символом оператора \widehat{F} .

Операция symb линейна. Для любых операторов $\widehat{F}, \widehat{G}, \widehat{F}_0, \widehat{G}_0$, функции $u(x)$ и вектора $\mu \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$\begin{aligned} \text{symb}(\widehat{F} + \widehat{F}_0) \circ (\widehat{G} + \widehat{G}_0) &= \text{symb}(\widehat{F} \circ \widehat{G}) + \text{symb}(\widehat{F} \circ \widehat{G}_0) + \\ &\quad + \text{symb}(\widehat{F}_0 \circ \widehat{G}) + \text{symb}(\widehat{F}_0 \circ \widehat{G}_0), \\ \text{symb}(u\widehat{F} \circ \widehat{G}) &= u \text{symb}(\widehat{F} \circ \widehat{G}), \\ \text{symb}(\widehat{F} \circ \widehat{G} \circ \partial^\mu) &= \text{symb}(\widehat{F} \circ \widehat{G}) p^\mu. \end{aligned} \quad (4.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть \widehat{F} и \widehat{G} – два оператора и $F(x, p), G(x, p)$ – их символы. Тогда

$$\text{symb}(\widehat{F} \circ \widehat{G}) = F(x, p + \partial) G(x, p). \quad (4.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Более подробно правую часть равенства (4.3) можно записать следующим образом:

$$\sum_{\mu} f_\mu(x) (p + \partial)^\mu G(x, p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.1. Согласно соотношениям (4.2) достаточно рассмотреть случай, когда $\widehat{F} = \partial^\mu$, $\widehat{G} = \hat{u}(x)$, где $u(x)$ – гладкая функция:

$$\text{symb}(\partial^\mu \circ \hat{u}) = (p + \partial)^\mu u.$$

Это равенство доказывается индукцией по $|\mu|$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \text{symb}[\widehat{F}, -\Theta] &= (2\langle p, \partial \rangle + \Theta) F(x, p), \\ \text{symb}[\widehat{F}, \hat{v}] &= (F(x, p + \partial) - F(x, p)) v(x). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Уравнение (1.4) равносильно следующему:

$$(2\langle p, \partial \rangle + \Theta) F(x, p) + (F(x, p + \partial) - F(x, p)) v(x) = 0. \quad (4.4)$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных относительно переменных x . Требуется найти решение вида (4.1).

Положим

$$F_{(m)} = \sum_{|\mu|=m} f_\mu(x) p^\mu.$$

Тогда $F = \sum_{m=0}^M F_{(m)}$.

Однородная форма степени m разложения (4.4) по p имеет вид

$$2\langle p, \partial \rangle F_{(m-1)} + \Theta F_{(m)} + \sum_{r>0} F_{(m+r)}^{(r)}(x, p)(\partial)v(x) = 0, \quad (4.5)$$

где $F_{(j)}$ считается равным нулю, если $j \notin \{0, 1, \dots, M\}$, $F_{(s)}^{(r)}(\partial)$ – однородная форма степени r по ∂ при разложении Тейлора $F_{(s)}(x, p + \partial) - F_{(s)}(x, p)$ по формальной переменной ∂ в точке $\partial = 0$.

Для любого $k \in \mathbb{R}^n$ определим его порядок $\text{ord } k$ относительно спектра \mathfrak{M} . Порядок вектора k есть наименьшее $J \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ такое, что для некоторых $k_1, \dots, k_J \in \mathfrak{M}$

$$k = k_1 + \dots + k_J.$$

Порядок нуля считаем равным нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. А. Из-за конечности спектра $\text{ord } k = +\infty$ для почти любого $k \in \mathbb{R}^n$.

Б. Пусть α – вершина спектра. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $\text{ord}(j\alpha) = j$.

В. Пусть α – вершина спектра и β – присоединенный к ней вектор. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $\text{ord}((j-1)\alpha + \beta) = j$.

Пусть Π_j – пространство функций вида

$$\Psi(p, k) = \sum_{\text{ord } k=j} \psi_k(p)e^{(k, x)}.$$

Положим $\tilde{\Pi}_l = \bigcup_{l \leq j} \Pi_j$. Определим естественную проекцию $\pi_j: \tilde{\Pi}_j \rightarrow \Pi_j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть F – символ первого интеграла. Тогда

$$F_{(M-s)} \in \tilde{\Pi}_{[s/2]}, \quad (4.6)$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. В частности, $F_{(M)}$ не зависит от x .

Более того, функции

$$\Phi_{(M-s)} = \pi_{[s/2]} F_{(M-s)} \in \Pi_{[s/2]}$$

с четными $s = 2j$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$2\langle p, \partial \rangle \Phi_{(M-2j-2)} + \pi_j \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial p_l} \Phi_{(M-2j)}(x, p) \partial_{x_l} v(x) \right) = 0. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим (4.6). Используем индукцию по s .

При $t = M + 1$ формула (4.5) имеет вид $2\langle p, \partial \rangle F_{(M)}(p, x) = 0$, откуда с учетом (1.3) и (4.1) получаем $F_{(M)} = F_{(M)}(p)$. Следовательно, формула (4.6) выполняется при $s = 0$.

Теперь предположим, что соотношение (4.6) имеет место при всех $s = 0, 1, \dots, s_0$. Согласно (4.5)

$$2\langle p, \partial \rangle F_{(M-s_0-1)} = -\Theta F_{(M-s_0)} - \sum_{r>0} F_{(M-s_0+r)}^{(r)}(x, p)(\partial)v(x). \quad (4.8)$$

Пусть s_0 четное. Тогда

$$F_{(M-s_0)} \in \tilde{\Pi}_{s_0/2}, \quad F_{(M-s_0+r)}^{(r)} \in \tilde{\Pi}_{[(s_0-r)/2]} \subset \tilde{\Pi}_{s_0/2-1}, \quad r > 0.$$

Имея в виду равенство $[(s_0 + 1)/2] = s_0/2$, получаем (4.6).

Пусть теперь s_0 нечетное. Тогда

$$F_{(M-s_0)} \in \tilde{\Pi}_{(s_0-1)/2}, \quad F_{(M-s_0+r)}^{(r)} \in \tilde{\Pi}_{[(s_0-r)/2]} \subset \tilde{\Pi}_{(s_0-1)/2}, \quad r > 0.$$

Следовательно, $F_{(M-s_0-1)} \in \tilde{\Pi}_{(s_0+1)/2} = \tilde{\Pi}_{[(s_0+1)/2]}$.

Равенства (4.7) получаем, применяя оператор π_j к (4.8), где $s_0 + 1 = 2j + 2$.

5. ВЕРШИНЫ И ВЕКТОРЫ, ПРИСОЕДИНЕННЫЕ К НИМ

5.1. Пусть α – вершина спектра. Тогда (согласно предложению 4.2) при $j \geq 1$

$$2\langle p, \partial \rangle (F_{(M-2j)}^{j\alpha} e^{j(\alpha, x)}) = - \sum_l \frac{\partial}{\partial p_l} (F_{(M-2j+2)}^{(j-1)\alpha} e^{(j-1)(\alpha, x)}) \frac{\partial}{\partial x_l} (v^\alpha e^{(\alpha, x)}), \quad (5.1)$$

где $F_{(s)}^k = F_{(s)}^k(p)$ – коэффициент при $e^{(k, x)}$ функции $F_{(s)}$. Отсюда легко следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}$ – вершина. Тогда при $j = 1, 2, \dots, [(M + 1)/2]$

$$F_{(M-2j)}^{j\alpha} = \frac{(v^\alpha)^j}{(-2)^j j!} A^j F_{(M)}, \quad (5.2)$$

где оператор A имеет вид

$$A = \frac{1}{\langle p, \alpha \rangle} D_\alpha, \quad D_\alpha = \left\langle \alpha, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle.$$

Выражения (5.2) должны быть многочленами относительно p . Это накладывает существенные ограничения на $F_{(M)}$.

5.2. Аналогично, используя индукцию и равенство (5.1), можно легко доказать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}$ – вершина и β – присоединенный к α вектор. Тогда при $j = 1, 2, \dots, [(M+1)/2]$

$$F_{(M-2j)}^{(j-1)\alpha+\beta} = \frac{(v^\alpha)^{j-1} v^\beta}{(-2)^j \langle p, (j-1)\alpha + \beta \rangle} G_{j-1} F_{(M)}, \quad (5.3)$$

где операторы G_j находятся из следующих рекуррентных соотношений:

$$G_0 = D_\beta, \quad G_j = D_\alpha \frac{1}{\langle p, (j-1)\alpha + \beta \rangle} G_{j-1} + D_\beta \frac{1}{j!} A^j, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

Выражения (5.3) должны быть многочленами относительно p . Это налагает еще ряд ограничений на $F_{(M)}$.

5.3. Далее нам также понадобится следующее простое замечание.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть выражения (5.2) и (5.3) являются многочленами относительно p при $j = 1, 2, \dots, [(M+1)/2]$. Тогда при целых $j > [(M+1)/2]$ правые части равенств (5.2) и (5.3) тождественно равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Степень d многочленов (5.2) и (5.3) равна $d = M - 2j$. При $j = [(M+1)/2]$ имеем

$$d = \begin{cases} 0, & \text{если } M \text{ четное,} \\ -1, & \text{если } M \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Это означает, что при нечетном M и $j = [(M+1)/2]$ выражения (5.2) и (5.3) равны нулю, а при четном не зависят от p . Остается воспользоваться равенством (5.4).

5.4. Далее важную роль играет следующая

ТЕХНИЧЕСКАЯ ЛЕММА. Произведем с операторами G_s следующие действия. Сначала представим их в стандартном виде, т.е. как сумму одночленов вида

$$q(p)D_\alpha^l \quad \text{или} \quad q_*(p)D_\alpha^l D_\beta$$

(все дифференцирования отнесены вправо). Затем положим $\langle p, s\alpha + \beta \rangle = 0$. Получившиеся операторы обозначим G_s^0 . Тогда

$$G_s^0 = \frac{(-1)^s}{s! \langle p, \alpha \rangle^{2s}} \prod_{j=0}^{s-1} \left\langle \alpha, \beta + \frac{j}{2}\alpha \right\rangle D_{s\alpha+\beta}. \quad (5.5)$$

При $s = 0$ произведение в (5.5) следует считать равным единице.

Поразительным является тот факт, что при вычислении G_s^0 операторы дифференцирования порядка выше первого взаимно уничтожились, а операторы дифференцирования первого порядка свелись к $D_{s\alpha+\beta}$ с некоторым коэффициентом.

Доказательство технической леммы содержится в разделе 7.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ

ЛЕММА 6.1. Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}$ – вершина спектра и вектор $\beta \in \mathfrak{M}$ присоединен к ней, причем выполнены условия (2.3). Тогда

$$D_{j\alpha+\beta}F_{(M)}(p)|_{\langle p, j\alpha+\beta \rangle=0} = 0, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 5.2 выражения (5.3) – многочлены. Следовательно, при $s = 0, 1, \dots, [(M-1)/2]$

$$G_s F_{(M)}(p) \quad \text{делится на} \quad \langle p, s\alpha + \beta \rangle. \quad (6.2)$$

С учетом предложения 5.3 условия (6.2) выполняются при всех $s \in \mathbb{Z}_+$.

Применяя техническую лемму, получим:

$$D_{s\alpha+\beta}F_{(M)}(p) \quad \text{делится на} \quad \langle p, s\alpha + \beta \rangle, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \quad (6.3)$$

Здесь мы воспользовались тем, что согласно (2.3) коэффициенты перед $D_{s\alpha+\beta}$ в (5.5) отличны от нуля.

Теперь докажем основную лемму. Пусть L – двумерная плоскость, натянутая на векторы α и β . Тогда $\mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp$.

Зафиксируем ортогональную проекцию p_\perp вектора p на L^\perp . Тогда множество решений уравнения $\langle p, a\alpha + b\beta \rangle = 0$ – прямая $l_{a,b}$, параллельная L и проходящая через точку $p = p_\perp$. Множество \mathbf{I} прямых $l_{a,b}$ изоморфно одномерному вещественному проективному пространству с однородными координатами a, b .

Множество $Z \subset \mathbf{I}$ точек a, b , для которых

$$D_{a\alpha+b\beta}F_{(M)}(p)|_{p \in l_{a,b}} = 0, \quad (6.4)$$

является алгебраическим подмногообразием в \mathbf{I} . Согласно лемме 6.1 множество Z содержит бесконечно много точек вида $b/a \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, Z совпадает с \mathbf{I} . Итак, (6.4) выполняется для любых a, b и p_\perp .

Для любого p вектор $v(p) = -\langle p, \beta \rangle \alpha + \langle p, \alpha \rangle \beta$ перпендикулярен p , поэтому

$$D_{v(p)}F_{(M)} \equiv 0.$$

Остается заметить, что группа $g(\alpha, \beta)$ изоморфна фазовому потоку, порожденному векторным полем $v(p)$.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕХНИЧЕСКОЙ ЛЕММЫ

Прежде всего переформулируем лемму в более удобном виде. А именно, произведем в операторах G_s замену $\tilde{\beta} = \beta + s\alpha$. Операторы G_s примут вид

$$G_0 = D_{\tilde{\beta}}, \quad G_s = \sum_{l=0}^s B_l \circ D_{\tilde{\beta}-j\alpha} \frac{1}{(j-l)!} \circ A^{j-l}, \quad s > 0, \quad (7.1)$$

где

$$B_0 = 1, \quad B_l = D_\alpha \circ \frac{1}{\langle p, \tilde{\beta} - \alpha \rangle} D_\alpha \circ \frac{1}{\langle p, \tilde{\beta} - 2\alpha \rangle} \dots D_\alpha \circ \frac{1}{\langle p, \tilde{\beta} - l\alpha \rangle}, \quad l > 0.$$

Теперь техническую лемму можно сформулировать следующим образом.

ЛЕММА 7.1. *Произведем с операторами G_s следующие действия. Сначала представим их в стандартном виде. Затем положим $\langle p, \tilde{\beta} \rangle = 0$. Получившиеся операторы обозначим G_s^0 . Тогда*

$$G_s^0 = \frac{(-1)^s}{s! \langle p, \alpha \rangle^{2s}} \prod_{j=0}^{s-1} \left\langle \alpha, \tilde{\beta} - \left(s - \frac{j}{2} \right) \alpha \right\rangle D_{\tilde{\beta}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее для краткости тильды над β опустим. Положим

$$a = \langle \alpha, \alpha \rangle, \quad b = \langle \alpha, \beta \rangle, \\ q_0 = 1, \quad q_s = \prod_{j=1}^s \left(\frac{j}{2} a - b \right), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Нам понадобятся следующие предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Приведем операторы B_l к стандартному виду и положим $\langle p, \beta \rangle = 0$. Тогда получившиеся операторы оказываются следующими:*

$$B_l^0 = \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^{l-j}}{j! (l-j)! \langle p, \alpha \rangle^{2j}} \frac{q_{2j}}{q_j} A^{l-j}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Приведем операторы $B_l D_\alpha$ к стандартному виду и положим $\langle p, \beta \rangle = 0$. Тогда получившиеся операторы оказываются следующими:*

$$B_l^+ = \frac{(-1)^l}{l!} \langle p, \alpha \rangle A^{l+1} + \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(-1)^{l-j} b}{(j+1)! (l-j-1)! \langle p, \alpha \rangle^{1+2j}} \frac{q_{2j+1}}{q_{j+1}} A^{l-j}.$$

Предложения 7.1 и 7.2 доказываются по индукции.

Так как для любого $j \in \mathbb{Z}$

$$D_\beta \circ \langle p, \alpha \rangle^j = \frac{b}{a} D_\alpha \circ \langle p, \alpha \rangle^j - \frac{b}{a} \langle p, \alpha \rangle^j D_\alpha + \langle p, \alpha \rangle^j D_\beta,$$

то верны следующие равенства:

$$D_\beta \circ A^l = \frac{b}{a} D_\alpha \circ A^l - \frac{b}{a} A^l \circ D_\alpha + A^l \circ D_\beta, \quad l = 0, 1, \dots \quad (7.2)$$

С учетом тождеств (7.2) равенства (7.1) переписываются в виде

$$G_j = \sum_{l=0}^j \frac{1}{(j-l)!} \left(\frac{b-ja}{a} B_l D_\alpha A^{j-l} - \frac{b}{a} B_l \circ A^{j-l} \circ D_\alpha + B_l \circ A^{j-l} \circ D_\beta \right).$$

Таким образом,

$$G_s^0 = R_1 + R_2 + R_3,$$

где

$$R_1 = \sum_{l=0}^s \frac{1}{(s-l)!} \frac{b-sa}{a} B_l^+ \circ A^{s-l}, \quad R_2 = - \sum_{l=0}^s \frac{1}{(s-l)!} \frac{b}{a} B_l^0 \circ A^{s-l} \circ D_\alpha,$$

$$R_3 = \sum_{l=0}^s \frac{1}{(s-l)!} B_l^0 \circ A^{s-l} \circ D_\beta.$$

Доказательство леммы завершается применением следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. *Справедливы следующие равенства:*

$$R_1 = -R_2 = \frac{b}{a} \frac{1}{s! \langle p, \alpha \rangle^{2s}} \frac{q_{2s}}{q_s} D_\alpha, \quad R_3 = \frac{1}{s! \langle p, \alpha \rangle^{2s}} \frac{q_{2s}}{q_s} D_\beta.$$

Предложение 7.3 доказывается прямым вычислением с использованием предложений 7.1, 7.2. Проверим, например, последнее равенство:

$$R_3 = \sum_{l=0}^s \sum_{j=0}^l \frac{1}{(s-l)!} \frac{(-1)^{l-j}}{j! (l-j)! \langle p, \alpha \rangle^{2j}} \frac{q_{2j}}{q_j} A^{s-j} D_\beta =$$

$$= \sum_{j=0}^s \frac{1}{j! \langle p, \alpha \rangle^{2j}} \frac{q_{2j}}{q_j} A^{s-j} D_\beta \sum_{l=j}^s \frac{(-1)^{l-j}}{(s-l)! (l-j)!}.$$

Так как внутренняя сумма (сумма по l) отлична от нуля только при $j = s$, то следует положить $j = l = s$, откуда и следует требуемая формула для R_3 .

8. ЛЕММЫ О ПРИСОЕДИНЕННОМ ВЕКТОРЕ

В этом разделе начинается геометрическая часть доказательства. Везде далее полагаем

$$\mathfrak{C} = \text{conv}(\mathfrak{M} \cup \{0\}),$$

где $\text{conv}(S)$ – выпуклая оболочка множества S .

Кроме того, так как согласно условиям теоремы 2.1 матрица ϑ положительно или отрицательно определена, можно считать, что $\vartheta = \pm E_n$, где E_n – единичная матрица порядка n . Имея в виду возможность замены \hat{H} на $-\hat{H}$, можно считать, что $\vartheta = E_n$. Поэтому далее считаем, что $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное евклидово скалярное произведение и группа $G(\vartheta)$, сохраняющая метрику ϑ , есть $SO(n)$.

ЛЕММА 8.1. Пусть α – вершина многогранника \mathfrak{C} , а I – его ребро, содержащее α . Тогда I содержит вектор $\beta \in \mathfrak{M}$, присоединенный к α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве β возьмем ближайший к α элемент множества $I \setminus \{\alpha\}$. Пусть

$$k_1 + \dots + k_{s+1} = s\alpha + \beta, \quad k_1, \dots, k_{s+1} \in \mathfrak{M}. \quad (8.1)$$

Покажем, что один из векторов k_j равен β . Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – гиперплоскость такая, что $\Lambda \cap \mathfrak{C} = I$. Так как многогранник \mathfrak{C} выпуклый, указанная гиперплоскость существует. Тогда для любого $k \in \mathfrak{M}$ проекция k на нормаль ν к Λ меньше либо равна проекции α на ν , причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $k \in I$.

Проецируя (8.1) на ν , получаем, что $k_1, \dots, k_{s+1} \in I$. Далее, проецируя (8.1) на I , получаем требуемое утверждение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Назовем ребро I с концами α_1 и α_2 *положительным*, если $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Пусть α и β те же, что в лемме 8.1. Если I положительное, то $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$.

Пусть ν_1, \dots, ν_m – некоторый базис в \mathbb{R}^n . Тогда в \mathbb{R}^n определено отношение лексикографического порядка \prec . Для вектора $u = \sum u_j \nu_j \in \mathbb{R}^n$ скажем, что $0 \prec u$, если в последовательности u_1, u_2, \dots, u_n первое ненулевое число положительно. Скажем, что $u \prec v$, если $0 \prec v - u$.

Отношение \prec , определенное таким образом, очевидно, согласовано с линейной структурой на \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \text{если } u \prec v, & \quad \text{то } u + w \prec v + w, \\ \text{если } u \prec v \text{ и } \lambda > 0, & \quad \text{то } \lambda u \prec \lambda v. \end{aligned}$$

Рассмотрим на \mathbb{R}^n отношение лексикографического порядка \prec , соответствующее некоторому базису e_1, e_2, \dots, e_n .

ЛЕММА 8.2. Пусть α – максимальный относительно \prec вектор в спектре \mathfrak{M} . Тогда α – вершина.

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – линейное подпространство, содержащее α , а β – максимальный вектор среди векторов $k \in \mathfrak{M}$ таких, что $k \notin \Lambda$. Тогда β присоединен к α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$k_1 + \dots + k_s = s\alpha, \quad k_1, \dots, k_s \in \mathfrak{M}.$$

Так как $k_j \preceq \alpha$, $j = 1, \dots, s$, имеем $k_1 = \dots = k_s = \alpha$.

Теперь предположим, что выполняется равенство (8.1). Его правая часть не лежит в Λ . Следовательно, один из векторов k_j (можно считать, что k_1) не лежит в Λ . Тогда $k_1 \preceq \beta$, $k_l \preceq \alpha$, $l = 2, \dots, s$. Отсюда следует, что $k_1 = \beta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. Назовем вершину α многогранника \mathfrak{C} *правильной*, если α – единственная точка пересечения \mathfrak{C} и плоскости, перпендикулярной вектору α и проходящей через точку α . Вершину спектра α в этом случае тоже будем называть *правильной*.

ЛЕММА 8.3. Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}$ – правильная вершина и $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – линейное подпространство, содержащее α . Предположим, что существует вектор $k \in \mathfrak{M} \setminus \Lambda$ такой, что $\langle \alpha, k \rangle > 0$. Тогда существует присоединенный к α вектор $\beta \in \mathfrak{M} \setminus \Lambda$ такой, что $\langle \beta, \alpha \rangle > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ортогональный базис e_1, \dots, e_n такой, что $e_1 = \alpha_1$ и $e_2, \dots, e_l \in \Lambda$, где $l = \dim \Lambda$. Так как вершина α правильная, то вектор α максимален относительно соответствующего отношения \prec среди векторов из \mathfrak{M} . Пусть β – максимальный вектор из $k \in \mathfrak{M} \setminus \Lambda$.

Согласно лемме 8.2 вектор β присоединен к α . Так как $\beta \succ k$, то $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$.

ЛЕММА 8.4. Пусть $\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – линейное пространство, натянутое на несколько вершин многогранника \mathfrak{C} , причем остальные вершины лежат в Λ^\perp . Предположим, что существует вектор $k \in \mathfrak{M} \setminus \Lambda$, не перпендикулярный Λ . Тогда найдется вершина спектра $\alpha \in \Lambda$ и присоединенный к ней вектор β такие, что

$$\beta \in \mathfrak{M} \setminus \Lambda, \quad \langle \alpha, \beta \rangle > 0. \tag{8.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многогранник $\text{conv}(\mathfrak{M} \cap \Lambda)$. Его размерность (как многообразия с краем) равна d , где $d = \dim \Lambda$ (иначе спектр разделяется).

Пусть векторы h_1, \dots, h_J являются перпендикулярами, опущенными из начала координат на его $(d - 1)$ -мерные грани f_1, \dots, f_J (или их продолжения). Заметим, что основание хотя бы одного из перпендикуляров h_j лежит строго внутри соответствующей грани. Действительно, этим свойством обладает самый короткий перпендикуляр.

Можно считать, что номер j , о котором говорится выше, равен единице. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ – вершины $\text{conv}(\mathfrak{M} \cap \Lambda)$, лежащие в грани f_1 . Так как векторы $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ порождают Λ , найдется $i \in \{1, \dots, N\}$ такой, что $\langle \alpha_i, k \rangle \neq 0$. Меняя, если необходимо, k на $-k$, имеем $\langle \alpha_i, k \rangle > 0$. Далее считаем, что $i = 1$.

Вектор α_1 максимален в \mathfrak{M} относительно отношения \prec , соответствующего некоторому ортогональному базису e_1, \dots, e_n , где $e_1 = h_1$ и $e_1, \dots, e_d \in \Lambda$.

Положим $\beta = \max_{\xi \in \mathfrak{M}, \xi \notin \Lambda} \xi$, где максимум берется относительно \prec . Так как $\beta \succ k$ и $\langle \alpha_1, k \rangle > 0$, имеем $\langle \alpha_1, \beta \rangle > 0$.

Вектор β присоединен к $\alpha = \alpha_1$: это доказывается так же, как и в лемме 8.2.

9. ЛЕММА О ПОРОЖДЕНИИ

Далее для любого линейного подпространства $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ мы используем обозначение $g(\Lambda) \subset SO(n)$ для подгруппы всех сохраняющих ориентацию ортогональных преобразований, оставляющих на месте векторы, лежащие в Λ^\perp – ортогональном дополнении к Λ .

ЛЕММА 9.1. Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{R}^n$ – два не ортогональных друг другу линейных подпространства размерности, большей или равной двум. Тогда группы $g(\Lambda_1)$ и $g(\Lambda_2)$ порождают $g(\Lambda_1 \oplus \Lambda_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространства Λ_1 и Λ_2 содержат подпространства $L_1 \subset \Lambda_1$ и $L_2 \subset \Lambda_2$ такие, что L_1 и L_2 двумерны и не ортогональны друг другу. Тогда $g(L_1)$ и $g(L_2)$ порождают $g(L_1 \oplus L_2)$, если верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. Лемма 9.1 справедлива в случае, когда $\dim \Lambda_1 = \dim \Lambda_2 = 2$.

Найдутся две последовательности подпространств Π_0, \dots, Π_s и π_1, \dots, π_s такие, что выполнены следующие условия:

- 1) $L_1 \oplus L_2 = \Pi_0 \subset \Pi_1 \subset \dots \subset \Pi_s = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$;
- 2) $\dim \Pi_{j+1} = \dim \Pi_j + 1$, $j = 0, \dots, s-1$;
- 3) $\Pi_{j+1} = \Pi_j \oplus \pi_{j+1}$, $j = 0, \dots, s-1$;
- 4) $\dim \pi_j = 2$, $j = 1, \dots, s$;
- 5) для любого $j \in \{1, \dots, s\}$ пространство π_j лежит или в Λ_1 , или в Λ_2 .

Предположим, что верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. Лемма 9.1 справедлива в случае, когда $\dim \Lambda_2 = 2$ и $\dim \Lambda_1 \oplus \Lambda_2 = \dim \Lambda_1 + 1$.

Тогда лемма 9.1 будет доказана путем последовательного применения предложения 9.2, в котором берется $\Lambda_1 = \Pi_j$ и $\Lambda_2 = \pi_{j+1}$, $j = 0, \dots, s-1$.

Итак, остается доказать предложения 9.1 и 9.2. Основным инструментом, используемым в доказательстве этих предложений, является теорема Рашевского–Чжоу [10]. Эта теорема утверждает, в частности, следующее.

Пусть G_1 и G_2 – две связанные подгруппы в конечномерной группе Ли G и $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}$ – соответствующие алгебры Ли. Пусть минимальная подалгебра, содержащая \mathfrak{g}_1 и \mathfrak{g}_2 , совпадает с $\tilde{\mathfrak{g}}$. Тогда G_1 и G_2 порождают связную подгруппу $\tilde{G} \subset G$, соответствующую алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Согласно этой теореме достаточно проверить, что алгебры Ли $\mathfrak{g}(\Lambda_1)$, $\mathfrak{g}(\Lambda_2)$ групп $g(\Lambda_1)$, $g(\Lambda_2)$ порождают алгебру Ли $\mathfrak{g}(\Lambda_1 \oplus \Lambda_2)$ группы $g(\Lambda_1 \oplus \Lambda_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 9.1. Имеем два случая:

- а) $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = 0$;
- б) $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \neq 0$.

Случай “б” получается, если в предложении 9.2 положить $\dim \Lambda_1 = 2$, так что ограничимся лишь случаем “а”. Здесь можно считать, что размерность объемлющего пространства $n = 4$, причем Λ_1 натянуто на два первых базисных вектора ортонормированного базиса. Тогда $\mathfrak{g}(\Lambda_1) \subset so(4)$ – одномерное подпространство, порожденное матрицей

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

Пусть векторы-столбцы $u, v \in \mathbb{R}^4$ образуют базис в Λ_2 . Тогда $\mathfrak{g}(\Lambda_2) \subset so(4)$ – одномерное подпространство, порожденное матрицей

$$A_2 = uv^T - vu^T = \begin{pmatrix} 0 & a & c & d \\ -a & 0 & e & f \\ -c & -e & 0 & b \\ -d & -f & -b & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Так как $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2 = \mathbb{R}^4$, имеем $b \neq 0$. Так как Λ_1 и Λ_2 не перпендикулярны друг другу, по крайней мере один из коэффициентов c, d, e, f отличен от нуля. Остается воспользоваться следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3. Пусть a, b, c, d, e, f – вещественные числа, причем

$$b \neq 0, \quad c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \neq 0.$$

Тогда минимальная алгебра Ли, содержащая матрицы (9.1) и (9.2), есть $so(4)$.

Предложение 9.3 проверяется прямым вычислением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 9.2. Можно считать, что размерность объемлющего пространства $n = \dim \Lambda_1 + 1$, причем Λ_1 натянуто на первые $n - 1$ базисных векторов ортонормированного базиса. Тогда $\mathfrak{g}(\Lambda_1)$ состоит из всевозможных кососимметрических матриц, имеющих нулевые последний столбец и последнюю строку.

Пусть $u, v \in \mathbb{R}^n$ – базис в Λ_2 . Алгебра $\mathfrak{g}(\Lambda_2)$ одномерна и порождена матрицей

$$A = uv^T - vu^T = \begin{pmatrix} * & w \\ w^T & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \neq w \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Остается воспользоваться следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4. Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ – линейное подпространство, натянутое на первые $n - 1$ базисных векторов. Тогда минимальная алгебра Ли, содержащая алгебру Ли группы $g(L)$ и матрицу A , есть $so(n)$.

Предложение 9.4 проверяется прямым вычислением.

10. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2.1

Рассмотрим многогранник \mathfrak{E} . Его положительные ребра разбиваются на несколько классов эквивалентности $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_s$. Два ребра входят в один класс тогда и только тогда, когда от одного до другого можно пройти по положительным ребрам. Если положительных ребер нет, то считаем, что классов \mathbf{I}_j тоже нет.

Рассмотрим некоторый класс \mathbf{I}_j . Каждому из ребер, лежащих в нем, соответствуют вершина α и присоединенный вектор β такие, что $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ (лемма 8.1).

Каждому классу \mathbf{I}_j соответствует $L_j \subset \mathbb{R}^n$ – минимальное линейное подпространство, содержащее ребра из \mathbf{I}_j . Соответствующие группы $g(\alpha, \beta)$ порождают $g(L_j)$ (лемма 9.1).

Заметим, что линейное пространство L_0 , порожденное векторами $\alpha_1, \dots, \alpha_K$, идущими из начала координат в вершины \mathfrak{E} , не лежащие в $L_1 \cup \dots \cup L_s$, таково, что

$$L_1 \oplus \dots \oplus L_s \oplus L_0 = \mathbb{R}^n.$$

Если это не так, то \mathfrak{M} лежит в подпространстве \mathbb{R}^n положительной коразмерности, т.е. спектр разделяется.

Любая из вершин α_j правильная (иначе из нее выходило бы положительное ребро). Рассмотрим некоторое фиксированное $j \in \{1, \dots, K\}$. Если для любого $k \in \mathfrak{M}$ имеем $\langle \alpha_j, k \rangle = 0$, то спектр разделяется. Следовательно, можно считать, что существует вектор $k_0 \in \mathfrak{M}$ такой, что $\langle \alpha_j, k_0 \rangle > 0$ (здесь мы воспользовались симметрией спектра). Согласно лемме 8.3 найдется вектор β_j , присоединенный к α_j , такой, что $\langle \alpha_j, \beta_j \rangle > 0$.

Пусть l_j – двумерная плоскость, натянутая на α_j, β_j , и $g_j = g(\alpha_j, \beta_j) \equiv g(l_j)$ – соответствующая подгруппа в $SO(n)$. Тогда

$$\mathbb{R}^n = L_1 \oplus \dots \oplus L_s \oplus l_1 \oplus \dots \oplus l_K,$$

причем символ $F_{(M)}$ остается инвариантным при действии групп $g(L_1), \dots, g(L_s), g(l_1), \dots, g(l_K)$.

Пусть Λ_1 и Λ_2 – два пространства из набора $L_1, \dots, L_s, l_1, \dots, l_K$. Если Λ_1 и Λ_2 не ортогональны, то соответствующие группы $g(\Lambda_1)$ и $g(\Lambda_2)$ порождают $g(\Lambda_1 \oplus \Lambda_2)$. Тогда пространства Λ_1 и Λ_2 можно заменить на $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2$.

Объединяя пространства таким способом (пока это возможно), в конце концов получим следующее разложение \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{R}^n = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_N,$$

где:

- а) подпространства Q_j попарно ортогональны;
- б) каждое подпространство Q_j порождается вершинами многогранника \mathfrak{E} ;
- в) группы $g(Q_j)$ сохраняют символ $F_{(M)}$.

Теперь воспользуемся леммой 8.4. В качестве Λ возьмем Q_1 . Вектор k , о котором говорится в лемме 8.4, существует, так как иначе спектр разделяется. Из условий (8.2)

следует, что вектор β не ортогонален некоторому Q_j , $j \neq 1$. Пусть Q_{j_1}, \dots, Q_{j_s} — пространства, не ортогональные β . Тогда группы $g(Q_1), g(Q_{j_1}), \dots, g(Q_{j_s})$ и $g(\alpha, \beta)$ порождают $g(Q_1 \oplus Q_{j_1} \oplus \dots \oplus Q_{j_s})$. Мы уменьшили число слагаемых в разложении \mathbb{R}^n . Действуя далее по индукции, получаем, что символ $F_{(M)}$ инвариантен относительно действия $SO(n)$.

Итак, мы доказали, что в случае неразделяющегося спектра $F_{(M)} = c_M \langle p, p \rangle^{M/2}$, $c_M = \text{const}$. Но тогда оператор

$$\widehat{\Phi} = \widehat{F} - c_M \widehat{H}^{M/2}$$

является полиномиальным относительно дифференцирований оператором, коммутирующим с \widehat{H} , причем степень $\widehat{\Phi}$ меньше M . Далее повторяем рассуждения для $\widehat{\Phi}$ вместо \widehat{F} и т.д. Доказательство теоремы 2.1 закончено.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 02-01-00400, 02-01-01059, гранта Президента РФ МД-261.2003.01 и INTAS 00-221.

Список литературы

- [1] В. В. Козлов. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
- [2] В. В. Козлов, Д. В. Трещев. Матем. сб. 1988. Т. 135. № 1. С. 119–138.
- [3] В. В. Козлов. Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 5. С. 597–599.
- [4] M. Adler, P. van Moerbeke. Adv. Math. 1980. V. 38. P. 267–317; O. I. Bogoyavlensky. Commun. Math. Phys. 1976. V. 51. № 3. P. 201–209.
- [5] M. Adler, P. van Moerbeke. Commun. Math. Phys. 1982. V. 83. P. 83–106; M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov. Invent. Math. 1976. V. 37. № 2. P. 93–108; 1979. V. 54. № 3. P. 261–269.
- [6] В. В. Козлов, Д. В. Трещев. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 51. № 3. С. 537–556.
- [7] С. Гравель. ТМФ. 2003. Т. 137. № 1. С. 97–107.
- [8] М. А. Ольшанецкий, А. М. Переломов, А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский. Интегрируемые системы. II. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1987. С. 86–226.
- [9] B. Kostant. Quantization and representation theory. In: Representation Theory of Lie Groups. London Math. Soc. Lect. Notes Ser. V. 34. Eds. M. F. Atiyah, G. L. Luke. New York: Cambridge Univ. Press, 1979. P. 287–316; М. А. Семенов-Тянь-Шанский. Квантовые цепочки Тоды. Теоремы разложения и рассеяние. Препринт ЛОМИ, 1984; R. Goodman, N. R. Wallach. Commun. Math. Phys. 1982. V. 83. P. 355–386; 1984. V. 94. P. 177–217.
- [10] П. К. Ращевский. Учен. записки Моск. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-матем. наук. 1938. № 2. С. 83–94.

Поступила в редакцию 15.XII.2003 г.,
после доработки 2.II.2004 г.