ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 136, № 3
сентябрь, 2003

 В. В. Козлов*, Д. В. Трещев*

ЭВОЛЮЦИЯ МЕР В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Установлено существование слабых пределов решений (из класса L_p, $p \geqslant 1$) уравнения Лиувилля для невырожденных квазиоднородных уравнений Гамильтона. Найдены предельные вероятностные распределения в конфигурационном пространстве. Указаны условия равномерного распределения ансамбля Гиббса для геодезических потоков на компактных многообразиях.

Ключевые слова: квазиоднородная гамильтонова система, геодезический поток, слабый предел, ансамбль Гиббса, равномерное распределение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ – фазовое пространство динамической системы

$$\frac{dz}{dt} = v(z), \qquad z \in \Gamma, \tag{1}$$

g^t – ее фазовый поток, сохраняющий меру μ. Далее мы всегда считаем, что рассматриваемые векторные поля задают динамические системы в том смысле, что соответствующие фазовые потоки g^t определены при всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть

$$1 \leqslant p, q \leqslant \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{2}$$

Рассмотрим две функции $f_p, f_q \colon \Gamma \to \mathbb{R}$, $f_p \in L_p(\Gamma, \mu)$, $f_q \in L_q(\Gamma, \mu)$. Так как пространства L_p и L_q взаимно сопряжены, определена операция

$$(f_p, f_q) = \int_\Gamma f_p(z) f_q(z)\, d\mu(z).$$

Поскольку g^{-t} сохраняет меру μ, то $f_p \circ g^{-t} \in L_p(\Gamma, \mu)$ для всех t.

Рассмотрим функцию времени

$$k(t) = (f_p \circ g^{-t}, f_q). \tag{3}$$

В дальнейшем важную роль играет предельный случай, когда $p = 1$, $q = \infty$ (напомним, что пространство L_∞ состоит из измеримых существенно ограниченных функций).

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: dtresch@mech.math.msu.su

Мы будем изучать условия, при которых $k(t)$ имеет предел при $t \to \pm\infty$.

Пусть $\mu(\Gamma) < \infty$ и (3) – система с перемешиванием. Тогда

$$\lim_{t\to\pm\infty} k(t) = \frac{1}{\mu(\Gamma)} \int_\Gamma f_p\,d\mu \int_\Gamma f_q\,d\mu. \tag{4}$$

В силу предположения о конечности меры $\mu(\Gamma)$ функции f_p и f_q, очевидно, интегрируемые.

Хорошо известно, что равенство (4) справедливо для $p = q = 2$. В случае произвольных p, q, удовлетворяющих (2), оно легко доказывается с помощью следующих рассуждений. Для определенности будем считать, что $p < 2 < q$. Для любого $\varepsilon > 0$ представим функцию f_p в виде $f_p = \hat{f}_p + \tilde{f}_p$, где $\hat{f}_p \in L_2(\Gamma, \mu)$ и $\|\tilde{f}_p\|_{L_p} < \varepsilon$ (в качестве $\hat{f}_p$ можно взять, например, срезку функции f_p). Тогда

$$k(t) = (\hat{f}_p \circ g^{-t}, f_q) + r, \qquad r = (\tilde{f}_p \circ g^{-t}, f_q).$$

Остается заметить, что $f_q \in L_2(\Gamma, \mu)$ и $|r| \leqslant \varepsilon \|f_q\|_{L_q}$.

Для систем без перемешивания (даже эргодических) этот предел может не существовать.

Пример 1. Пусть Γ – n-мерный тор $\mathbb{T}^n = \{z_1, \dots, z_n \pmod{2\pi}\}$, а система (1) задается уравнениями

$$\dot{z}_1 = \omega_1, \quad \dots, \quad \dot{z}_n = \omega_n$$

с постоянными частотами $\omega_1, \dots, \omega_n$, независимыми над кольцом целых чисел. Если f_p и f_q – характеристические функции измеримых областей на $\mathbb{T}^n$, то $k(t)$ осциллирует и не имеет предела при $t \to \pm\infty$.

Обобщением предыдущего примера служит

Пример 2. Пусть $v(x)$ – произвольное векторное поле на гладком многообразии M, сохраняющее меру μ. Рассмотрим динамическую систему на $M \times \mathbb{T}$, где $\mathbb{T} = \{\varphi \pmod{2\pi}\}$ – одномерный тор:

$$\dot{x} = v(x), \qquad \dot{\varphi} = 1.$$

Если носители функций f_p, f_q при естественной проекции $M \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ проецируются внутрь некоторых отрезков

$$I_p, I_q \subset \mathbb{T} \qquad (\mathbb{T} \setminus I_p \neq \varnothing, \quad \mathbb{T} \setminus I_q \neq \varnothing),$$

то $k(t)$, вообще говоря, осциллирует и не имеет предела при $t \to \pm\infty$.

Пример 3. Пусть $T\colon M \to M$ – диффеоморфизм, сохраняющий меру μ на гладком компактном многообразии M. Напомним стандартную конструкцию надстройки над T. Пусть $l\colon M \to (0, \infty)$ – гладкая функция. Рассмотрим в прямом произведении $M \times \mathbb{R}$ подмножество

$$\widetilde{M_l} = \{(x, s) \in M \times \mathbb{R}\colon s \in [0, l(x)]\}.$$

В результате отождествления $(x, l(x)) \sim (T(x), 0)$ это подмножество превращается в гладкое многообразие M_l, на котором определено векторное поле $\partial/\partial s$. Полученная система называется надстройкой над T. Соответствующий фазовый поток сохраняет меру $d\mu\,ds$ на M_l, где ds – мера Лебега по координате s. Если $l = \mathrm{const}$, то остаются в силе аргументы, приведенные в примере 1. В частности, функция $k(t)$ по-прежнему, как правило, не имеет предела.

Предложение. *Пусть для некоторых функций* $f_p \in L_p(\Gamma,\mu)$ *и* $f_q \in L_q(\Gamma,\mu)$ *существует предел* $\lim_{t\to\infty} k(t) = k_\infty$. *Тогда*

$$k_\infty = (\bar{f}_p, f_q), \tag{5}$$

где

$$\bar{f}_p(z) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_p \circ g^{-t}(z)\, dt. \tag{6}$$

Существование предела (6) для почти всех z в случае $p = 1$ следует из эргодической теоремы Биркгофа. Обобщения на случай $p \neq 1$ можно найти в [1], [2]. Функция $\bar{f}_p$ инвариантна относительно g^t. Если $\mu(\Gamma) < \infty$ и $p \geqslant 1$, то

$$\int_\Gamma f\, d\mu = \int_\Gamma \bar{f}\, d\mu.$$

При $p = q = 2$ приведенное выше предложение установлено в работе [3] (доказательство содержится в [4]). В общем случае доказательство аналогично. Для полноты мы приводим его в приложении.

Если система (1) эргодична, то

$$\bar{f}_p = \frac{1}{\mu(\Gamma)} \int_\Gamma f_p\, d\mu$$

и (4) вытекает из (6).

Мы будем рассматривать системы (1) следующего вида:

$$\frac{dz}{dt} = v(z,\omega), \qquad \frac{d\omega}{dt} = 0. \tag{7}$$

Фазовым пространством Γ является прямое произведение $\Lambda\times\Delta$, где Λ – гладкое n-мерное многообразие, а Δ – интервал (возможно, бесконечный) на вещественной оси $\mathbb{R}$. Координата $\omega \in \Delta$ является первым интегралом. Будем предполагать, что при фиксированном ω система имеет инвариантную меру $d\nu = \lambda(z,\omega)\, d^n z$ на Λ.

Такой вид имеют, в частности, гамильтоновы системы: роль координаты ω играет полная энергия, а Λ – неособая энергетическая поверхность. В этом случае фазовое пространство Γ гамильтоновой системы с гамильтонианом H разбивается на клетки $h_1 \leqslant H \leqslant h_2$, причем в интервале (h_1, h_2) нет критических значений функции H.

Напомним определение динамической системы со слоистым потоком [4]. Положим $P_\gamma = \{(z,\omega) \in \Gamma : \omega = \gamma\}$. Это n-мерные интегральные многообразия системы (7). Отображение $\psi_\omega : (z,\omega) \mapsto z$ задает естественный диффеоморфизм, переводящий P_ω в Λ. Векторное поле v касается многообразий P_ω. Обозначим через v_ω ограничение v на P_ω, и пусть g^t_ω – его фазовый поток.

Определение. Поток g^t назовем *слоистым*, если существуют гладкая функция $\alpha : \Delta \to (0,\infty)$ и поток $g^s_* : \Lambda \to \Lambda$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} P_\omega \arrow[r, "g^t_\omega"] \arrow[d, "\psi_\omega"'] & P_\omega \arrow[d, "\psi_\omega"] \\ \Lambda \arrow[r, "g_*^{\alpha(\omega)t}"] & \Lambda \end{tikzcd} \tag{8}$$

коммутативна для всех $\omega \in \Delta$ и всех $t \in \mathbb{R}$. Слоистый поток назовем *невырожденным*, если функция $\alpha(\omega)$ имеет лишь изолированные критические точки.

Отождествляя P_ω и Λ с помощью диффеоморфизма ψ_ω, коммутативность диаграммы (8) можно записать в виде

$$g^t_\omega = g^{\alpha(\omega)t}_*. \tag{9}$$

Примеры систем со слоистыми потоками приведены в работе [4]. К ним относятся, в частности, геодезические потоки на римановых многообразиях (описывающие движение по инерции натуральных механических систем).

Пример 4. Гамильтонова система

$$\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{10}$$

называется *квазиоднородной*, если она инвариантна относительно преобразований подобия

$$t \mapsto s^{-1}t, \qquad q \mapsto s^a q, \qquad p \mapsto s^b p, \qquad H \mapsto s^c H,$$

$s > 0$ – параметр. Веса квазиоднородности a, b, c удовлетворяют естественному соотношению $a + b + 1 = c$. Многообразия P_ω определяются как множества точек $\{p, q\colon H(p, q) = \omega\}$.

При всех $\omega > 0$ $(\omega < 0)$ эти многообразия диффеоморфны. Пусть, например, $\omega > 0$. Положим $\omega = s^c$, $s > 0$. Тогда в качестве многообразия Λ можно взять энергетическую поверхность $\{H = 1\}$, обратный диффеоморфизм ψ^{-1}_ω имеет вид

$$q \mapsto s^a q, \qquad p \mapsto s^b p,$$

причем $\alpha(\omega) = 1/s = \omega^{-1/c}$. Таким образом, если $c \neq 0$, то поток квазиоднородной гамильтоновой системы (10) невырожден.

В частности, фазовый поток задачи n гравитирующих тел является невырожденным слоистым потоком. Здесь $a = -2/3$, $b = 1/3$, $c = 2/3$. В задаче о движении по инерции функция Гамильтона – однородная квадратичная форма по импульсам. Соответствующие уравнения Гамильтона тоже квазиоднородны с весами $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$.

Если поток g^t_* из (8) сохраняет меру ν_* на многообразии Λ, а σ – любая мера на интервале Δ, то поток g^t на $\Lambda \times \Delta$ сохраняет меру $\mu = \nu_* \times \sigma$. Наш основной результат составляет

Теорема 1. *Пусть g^t – невырожденный слоистый поток на $\Gamma = \Lambda \times \Delta$, мера ν_* абсолютно непрерывна относительно меры, заданной на Λ какой-нибудь римановой метрикой, мера σ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$, причем $\nu_*(\Lambda) < \infty$. Тогда для любых $f_p \in L_p(\Gamma, \mu)$ и $f_q \in L_q(\Gamma, \mu)$ при p и q, удовлетворяющих условиям (2), существует*

$$\lim_{t \to \pm\infty} k(t) = (\bar f_p, f_q).$$

При $p = q = 2$ теорема 1 доказана в работе [4]. Доказательство в общем случае аналогично (см. ниже), однако вряд ли может быть получено простым сведением к случаю $p = q = 2$, например путем аппроксимации f_p и f_q функциями из $L_2(\Gamma, \mu)$. Во всяком случае, по-видимому, нельзя избежать ссылок на весьма нетривиальные результаты из работ [1], [2], полученные без прямого сведения к случаю стандартных эргодических теорем. Из теоремы 1, в частности, вытекает, что для систем с невырожденными слоистыми потоками функция $f_p \circ g^t$ *слабо сходится* к ее биркгофовскому среднему $\bar{f}_p$ при $t \to \pm\infty$. Для квазиоднородных гамильтоновых систем это означает, что механическая система необратимо стремится к статистическому (т.е. тепловому) равновесию (по Гиббсу). Отметим, что в работе [4] мы предполагали, что $\sigma(\Delta) < \infty$. Позже выяснилось, что требование конечности меры несущественно.

2. НОВАЯ ФОРМА ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ

Снова рассмотрим динамическую систему (1) с инвариантной мерой μ. Пусть $h(\omega)$ – плотность некоторой вероятностной меры на $\mathbb{R} = \{\omega\}$: это неотрицательная функция из $L_1(\mathbb{R}, d\omega)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega)\, d\omega = 1.$$

Теорема 2. *Если* $f_p \in L_p(\Gamma, \mu)$, $f_q \in L_q(\Gamma, \mu)$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega)(f_p \circ g^{\omega t}, f_q)\, d\omega = (\bar{f}_p, f_q).$$

Теорема 2 является частным случаем теоремы 1. Действительно, заменим исходное уравнение (1) следующей системой вида (7):

$$\dot{z} = \omega v(z), \qquad \dot{\omega} = 0. \tag{11}$$

Соответствующий фазовый поток слоистый с $\alpha(\omega) = \omega$. После этого замечания остается положить в теореме 1 вместо f_p и f_q взять $h^{1/p} f_1$ и $h^{1/q} f_2$. Мы сначала приведем доказательство теоремы 2 (см. раздел 5), а затем (в разделе 6) выведем из нее теорему 1.

3. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть M – компактное конфигурационное пространство (возможно, с краем) механической системы с n степенями свободы и $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – локальные координаты на нем. Фазовое пространство Γ – кокасательное расслоение M ($\Gamma = T^*M$). Будем рассматривать движение по инерции, так что функция Гамильтона сводится к кинетической энергии

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) y_i y_j. \tag{12}$$

Если траектория выходит на границу пространства M, то происходит упругое отражение от границы. Фазовый поток этой гамильтоновой системы (с учетом упругих ударов) сохраняет меру Лиувилля $d\mu = d^n x\, d^n y$.

Согласно Гиббсу нахождение системы в определенном состоянии – случайное событие. Вероятность этого события в начальный момент времени задается вероятностной мерой с суммируемой плотностью $\rho(x, y)$:

$$\rho \in L_1(\Gamma, \mu), \qquad \int_\Gamma \rho\, d\mu = 1.$$

Фазовый поток g^t гамильтоновой системы переносит эту меру: в момент времени t ее плотность определяется выражением $\rho_t(z) = \rho \circ g^{-t}(z)$, где $z = (x, y)$ – точка фазового пространства Γ.

Пусть $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ – ограниченная измеримая функция на конфигурационном пространстве. Функцию φ можно продолжить до измеримой функции $\widetilde{\varphi}\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ согласно равенству $\widetilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x)$ для всех $y \in T_x^* M$. Положим

$$k(t) = (\rho \circ g^{-t}, \widetilde{\varphi}). \tag{13}$$

Эта функция корректно определена при всех t (здесь $p = 1,\ q = \infty$). Если φ – характеристическая функция некоторой измеримой области $\Phi \subset M$, то $k(t)$ – это доля гамильтоновых систем из ансамбля Гиббса, находящихся в момент времени t в области Φ.

Теорема 3. *Предел $\lim_{t\to\pm\infty} k(t)$ существует и равен $(\bar{\rho}, \varphi)$, где $\bar{\rho}$ – биркгофовское среднее плотности ρ.*

Это утверждение – прямое следствие теоремы 2 и слоистости геодезического потока (с упругими отражениями).

Следствие 1. *Предположим, что поток g^t эргодический на уровнях энергии $H > 0$. Тогда гамильтоновы системы из ансамбля Гиббса распределены на конфигурационном пространстве $M^n = \{x\}$ с плотностью*

$$\biggl(\int_M (\det A)^{-1/2}\, d^n x\biggr)^{-1} \frac{d^n x}{(\det A)^{1/2}}, \qquad A = (a_{ij}(x)). \tag{14}$$

Эта плотность – элемент объема на n-мерном римановом многообразии M, метрика которого порождается кинетической энергией системы (12).

Доказательство. Действительно, пусть φ – характеристическая функция измеримой области Φ на M. Ввиду эргодичности величина $\bar{\rho}$ является функцией от энергии $H = (Ay, y)/2$. С помощью линейного преобразования $y = C(x)u$ приведем эту положительно определенную квадратичную форму к сумме квадратов:

$$H = \frac{(C^T ACu, u)}{2} = \frac{(u, u)}{2}, \qquad C^T AC = E,$$

где E – единичная $(n \times n)$-матрица. Тогда

$$\int_\Gamma \bar{\rho}(H)\varphi\, d^n x\, d^n y = \int_\Gamma (\det A)^{-1/2} \bar{\rho}\biggl(\frac{u^2}{2}\biggr)\varphi\, d^n x\, d^n u = \alpha \int_\Phi (\det A)^{-1/2}\, d^n x,$$

где α не зависит от Φ. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь наиболее интересный с точки зрения приложений случай: M – подобласть в $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой, а H – квадратичная форма по импульсам с постоянными коэффициентами. В частности, плотность распределения (14) постоянна.

Следствие 2. *Предельное распределение в M равномерно при $t \to \pm\infty$ тогда и только тогда, когда биркгофовское среднее $\bar{\rho}$ не зависит от точки в M.*

Более точно, последнее условие надо понимать так, что найдется функция $\bar{\rho}'$, не зависящая от x и почти всюду совпадающая с $\bar{\rho}$. Указанному критерию равномерной распределенности удовлетворяют не только эргодические, но и некоторые интегрируемые системы.

Пример 5. Рассмотрим идеальный газ как бесстолкновительную сплошную среду в прямоугольном параллелепипеде $\Pi^n \subset \mathbb{R}^n$: каждая частица среды движется по инерции независимо от других частиц, упруго отражаясь от стенок Π^n. Утверждается, что независимо от начального распределения частиц газа по объему Π и по скоростям при $t \to \pm\infty$ газ необратимо стремится к равномерному заполнению объема Π. Это наблюдение Пуанкаре [5] строго доказано в работе [6]. Оно просто выводится из следствия 2. Действительно, предельная плотность $\bar{\rho}$ является первым интегралом бильярда в Π – динамической системы с упругими ударами. Эта система вполне интегрируема и невырожденна: она допускает n независимых первых интегралов – квадратов проекций импульса частицы на ребра параллелепипеда Π. Ввиду невырожденности величина $\bar{\rho}$ является функцией только этих интегралов. Следовательно, $\bar{\rho}$ не зависит от точки в Π, и поэтому (согласно следствию 2) предельное распределение газа будет равномерным.

Более интересным и поучительным является следующий

Пример 6. Рассмотрим n одинаковых частиц на отрезке $0 \leqslant x \leqslant a$; их координаты $x_1, \dots, x_n$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant a. \tag{15}$$

Частицы упруго сталкиваются между собой и с границами отрезка $\{x = 0\}$ и $\{x = a\}$. Поскольку при упругом ударе частицы одинаковой массы обмениваются скоростями, то распределение числа частиц по скоростям вообще не меняется и никакого стремления к распределению Максвелла не происходит (вопреки обычным представлениям статистической механики, использующим дополнительные предположения Больцмана). Тем не менее любая начальная плотность распределения ρ, заданная в $2n$-мерном фазовом пространстве этой системы, слабо сходится к биркгофовскому среднему $\bar{\rho}$, которое от координат $x_1, \dots, x_n$ не зависит. Таким образом, в состоянии статистического (теплового) равновесия все положения n сталкивающихся частиц окажутся равновероятными.

Действительно, указанная система с упругими ударами является интегрируемым бильярдом в области (15). Ее полная интегрируемость вытекает из конечности группы Кокстера многогранника (15) (это группа с графом B_n; см., например, [7]). Соответствующий бильярд в (15) имеет n независимых инволютивных интегралов в виде однородных полиномов по импульсам с постоянными коэффициентами. Нетрудно убедиться в том, что эта интегрируемая система невырожденна.

Аналогичные соображения применимы и к более общей задаче о газе Больцмана–Гиббса – задаче о движении набора идентичных шаров в n-мерном параллелепипеде Π^n $(n \leqslant 2)$, упруго сталкивающихся между собой и со стенками сосуда. Считается, что если радиусы шаров достаточно малы, то эта динамическая система с ударами эргодическая при каждом положительном значении полной энергии (см. обсуждение этого вопроса в работах [8], [9]). Но тогда из следствия 2 вытекает, что независимо от начального (достаточно регулярного) распределения вероятностей в конфигурационном пространстве газа Больцмана–Гиббса предельным распределением вероятностей будет равномерное распределение. Так как для последнего существенные флуктуации плотности частиц маловероятны, то это утверждение можно интерпретировать как необратимое стремление газа Больцмана–Гиббса к равномерному заполнению объемлющего сосуда. Подчеркнем, что при этом не используется специальное предположение Больцмана о статистической независимости парных соударений шаров.

4. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

В дальнейшем важную роль играет следующая эргодическая теорема.

Теорема 4. *Пусть* g^t *– поток на пространстве* M *с мерой* μ, $\mu(M) < \infty$, *и* $f \in L_p(M,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда имеет место сходимость в норме* L_p:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f \circ g^{-t}(z)\,dt \to \bar{f}(z). \tag{16}$$

Эта теорема известна и, в сущности, является почти очевидным следствием теоремы Ионеску-Тулсеа [2] или более общей теоремы Аккоглу [1] (см. также [10]), утверждающих, что сходимость (16) для $f \in L_p(M,\mu)$ имеет место почти всюду.

Доказательство. Действительно, используя этот факт, можно для любых наперед заданных $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ найти $T_0 > 0$ такое, что для всех $T > T_0$

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f \circ g^{-t}(z)\,dt - \bar{f}(z)\right| < \varepsilon_1, \qquad z \in M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2},$$

где $\mu(M \setminus M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) < \varepsilon_2$.

Величину ε_2 подберем так, чтобы

$$\int_N |f|^p(z)\,d\mu(z) < \varepsilon_1^p$$

для любого множества $N \subset M$ такого, что $\mu(N) < \varepsilon_2$. Тогда, очевидно,

$$\int_{M\setminus M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}} |\bar{f}|^p(z)\,dz < \varepsilon_1^p.$$

Для $T > T_0$ величина

$$\left\|\frac{1}{T}\int_0^T f \circ g^{-t}\,dt - \bar{f}\right\|_{L_p}^p$$

имеет вид

$$\left(\int_{M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}} + \int_{M\setminus M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}}\right)\left(\frac{1}{T}\int f \circ g^{-t}(z)\,dt - \bar{f}_p(z)\right)^p d\mu(z) \leqslant \varepsilon_1^p \mu(M) + 2^p\varepsilon_1^p,$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

Замечание. При $p = 1$ теорема 4 совпадает с хорошо известным результатом эргодической теории: для пространства конечной меры из сходимости почти всюду выводится сходимость в среднем (по норме L_1; см., например, [11]). При $p = 2$ теорема 4 совпадает с классической статистической теоремой фон Неймана (последняя, впрочем, справедлива и без предположения о конечности меры).

5. ОБОБЩЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ

Теорема 2 содержит как частный случай теорему 4. Действительно, пусть h – характеристическая функция отрезка $[0,1]$. Тогда для любой интегрируемой функции $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega)\varphi(\omega t)\,d\omega = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s)\,ds.$$

Доказательство теоремы 2 само использует теорему 4. Для любого $\varepsilon>0$ найдется кусочно-постоянная функция $h_\varepsilon : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что:

1) $h_\varepsilon(\omega)=c_k=\mathrm{const}$ на интервалах (ω_k,ω_{k+1}), $k=1,\dots,N$ (возможно, что $\omega_1=-\infty$ и $\omega_{N+1}=+\infty$, в этих случаях полагаем соответственно $c_1=0$ и $c_2=0$);

2) $\Delta\subset(\omega_1,\omega_{N+1})$;

3) $\int_\Delta |h-h_\varepsilon|\,d\omega<\varepsilon$.

Тогда (с учетом g^t-инвариантности меры μ)

$$\left|\int_\Delta h(\omega)(f_p\circ g^{-t},f_q)\,d\omega-\int_\Delta h_\varepsilon(\omega)(f_p\circ g^{-t},f_q)\,d\omega\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_\Delta |h-h_\varepsilon|\,d\omega\,\|f_p\|_{L_p}\,\|f_q\|_{L_q}\leqslant\varepsilon\,\|f_p\|_{L_p}\,\|f_q\|_{L_q}.$$

Таким образом, достаточно установить сходимость интегралов

$$J_k(t)=\int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} h_\varepsilon(\omega)(f_p\circ g^{-t},f_q)\,d\omega.$$

Согласно теореме 4

$$J_k(t)=\frac{c_k}{t}\int_{\omega_k t}^{\omega_{k+1}t}(f_p\circ g^{-t},f_q)\,ds\to c_k(\omega_{k+1}-\omega_k)(\bar f_p,f_q)$$

при $t\to\infty$. Остается заметить, что

$$\sum_1^N c_k(\omega_{k+1}-\omega_k)=\int_\Delta h_\varepsilon(\omega)\,d\omega=\int_\Delta h(\omega)\,d\omega+\delta,$$

причем $|\delta|\leqslant\varepsilon$. Что и требовалось доказать.

6. СЛОИСТЫЕ ПОТОКИ И ЭВОЛЮЦИЯ МЕР

В этом разделе мы докажем теорему 1.

Пусть $f_p\in L_p(\Gamma,\mu)$ и $f_q\in L_q(\Gamma,\mu)$, $\Gamma=\Lambda\times\Delta$. Положим

$$f_{p,\omega}(\cdot)=f_p(\cdot,\omega),\qquad f_{q,\omega}(\cdot)=f_q(\cdot,\omega).$$

Применяя теорему Фубини и формулу (9), получим

$$\int_\Gamma f_p\circ g^{-t}(z,\omega)f_q(z,\omega)\,d\mu(z)\,d\omega=\int_\Delta (f_{p,\omega}\circ g_\omega^{-t},f_{q,\omega})\,d\sigma=$$
$$=\int_\Delta (f_{p,\omega}\circ g_*^{\alpha(\omega)t},f_{q,\omega})\,d\sigma.$$

Пусть A_p, A_q – измеримые подмножества Λ, а Δ_p, Δ_q – интервалы в Δ. Пусть $\chi_p,\chi_q:\Gamma\to\mathbb{R}$ – характеристические функции (индикаторы) множеств $A_p\times\Delta_p$, $A_q\times\Delta_q$, соответственно. Положим

$$J(t)=\int_\Gamma \chi_p\circ g^{-t}(z,\omega)\chi_q(z,\omega)\,d^nz\,d\omega.$$

Основная лемма. *Пределы* $\lim_{t\to\pm\infty} J(t)$ *существуют.*

Теорема 1 вытекает из основной леммы. Действительно, так как ν_* абсолютно непрерывна относительно меры, задаваемой на Λ некоторой римановой метрикой, и σ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то в $L_p(\Gamma,\mu)$ всюду плотно пространство непрерывных на Γ функций с компактным носителем. В свою очередь, в этом пространстве всюду плотно (даже в C^0-норме) линейное пространство функций, которые являются конечными линейными комбинациями индикаторов μ-измеримых подмножеств из Γ.

Пусть теперь функции $f_p \in L_p(\Gamma,\mu)$ и $f_q \in L_q(\Gamma,\mu)$ произвольны. Для доказательства существования предела

$$\lim_{t\to+\infty} (f_p\circ g^{-t}, f_q)$$

воспользуемся критерием Коши: надо показать, что разность

$$(f_p\circ g^{-t_1}, f_q) - (f_p\circ g^{-t_2}, f_q) \tag{17}$$

меньше любого заданного $\varepsilon>0$ для всех $t_1,t_2>T(\varepsilon)$. Для этого аппроксимируем в соответствующих нормах f_p и f_q функциями φ_p и φ_q, которые являются конечными линейными комбинациями индикаторов: для любого $\varepsilon>0$ найдутся функции φ_p и φ_q такие, что

$$\|f_p-\varphi_p\|_{L_p}<\varepsilon, \qquad \|f_q-\varphi_q\|_{L_q}<\varepsilon. \tag{18}$$

После этого замечания разность (17) следует представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}(\varphi_p\circ g^{-t_1},\varphi_q) &- (\varphi_p\circ g^{-t_2},\varphi_q) + ((f_p-\varphi_p)\circ g^{-t_1}, f_q-\varphi_q) + \\ &+ ((f_p-\varphi_p)\circ g^{-t_1},\varphi_q) + (f_p\circ g^{-t_1}, f_q-\varphi_q) - ((f_p-\varphi_p)\circ g^{-t_2}, f_q-\varphi_q) - \\ &- ((f_p-\varphi_p)\circ g^{-t_2},\varphi_q) - (f_p\circ g^{-t_2}, f_q-\varphi_q).\end{aligned} \tag{19}$$

Согласно основной лемме разность первых двух членов можно сделать сколь угодно малой при достаточно больших значениях t_1 и t_2. Ввиду неравенства Коши–Шварца, g^t-инвариантности меры μ и неравенств (18) остальные слагаемые в (19) стремятся к нулю равномерно по t_1 и t_2, когда $\varepsilon\to 0$.

Доказательство основной леммы. Положим $A_0=A_p\cap A_q$, $\Delta_0=\Delta_p\cap\Delta_q$. Пусть $\chi_0\colon\Lambda\times\Delta\to\mathbb{R}$ – характеристическая функция (индикатор) измеримого множества $A_0\times\Delta_0$, а $\widetilde\chi_0\colon\Lambda\to\mathbb{R}$ – характеристическая функция множества A_0. Ясно, что

$$J(t)=\int_{\Delta_0}(\widetilde\chi_0\circ g_*^{\alpha(\omega)t},\widetilde\chi_0)\,d\sigma.$$

Пусть $D_\gamma=\{\omega\in\Delta_0\colon|\alpha'(\omega)|>\gamma\}$, $\alpha'=d\alpha/d\omega$. Согласно предположению критические точки функции $\omega\mapsto\alpha(\omega)$ изолированны. Следовательно, σ-мера множества $I\backslash D_\gamma$ стремится к нулю при $\gamma\to 0$. Более того, можно считать, что D_γ – объединение конечного числа интервалов. Пусть (ω_1,ω_2) – один из интервалов, составляющих D_γ. Тогда α можно считать координатой на (ω_1,ω_2). Действительно, функция $\omega(\alpha)$, обратная к $\alpha\colon(\omega_1,\omega_2)\to\mathbb{R}$, существует и является гладкой. Положим $d\sigma(\omega)=h(\omega)\,d\omega$. Согласно условиям теоремы 3 функция $\omega\to h(\omega)$ интегрируема: $h\in L_1(I,d\omega)$. Таким образом,

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}(\widetilde\chi_0\circ g_*^{\alpha(\omega)t},\widetilde\chi_0)\,h(\omega)\,d\omega=\int_{\alpha(\omega_1)}^{\alpha(\omega_2)}(\widetilde\chi_0\circ g_*^{\alpha(\omega)t},\widetilde\chi_0)\,h(\omega(\alpha))\,\omega'(\alpha)\,d\alpha. \tag{20}$$

Так как $h(\omega(\alpha))\omega'(\alpha) \in L_1((\alpha(\omega_2), \alpha(\omega_1)), d\alpha)$, то согласно теореме 2 интеграл (20) имеет предел при $t \to \infty$.

Лемма полностью доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство предложения

Пусть $k(t) \to k_\infty$ при $t \to \infty$. Тогда по теореме Коши

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\rho_t, \varphi)\, dt \to k_\infty$$

при $T \to \infty$. Согласно теореме Фубини имеем

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f_p \circ g^{-t}, f_q)\, dt = \int_\Gamma \tilde{f}_p(z,T) f_q(z)\, d\mu(z),$$

где

$$\tilde{f}_p(z,T) = \frac{1}{T}\int_0^T f \circ g^{-t}(z)\, dt.$$

Далее, из теоремы 4 следует

$$\int_\Gamma (\tilde{f}_p - \bar{f}_p)\, d\mu(z) \to 0$$

при $T \to \infty$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f_p(\cdot,t), f_q)\, dt \to (\bar{f}_p, f_q).$$

Действительно,

$$\int_\Gamma (\tilde{f}_p(z,T) - \bar{f}_p(z)) f_q\, d\mu(z) \leqslant \|\tilde{f}_p(\cdot,T) - \bar{f}_p\|_{L_p} \|f_q\|_{L_q} \to 0$$

при $T \to \infty$. Что и требовалось доказать.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 02-01-00400, 02-01-01059, 00-15-99269) и INTAS (грант № 00-221).

Список литературы

[1] *M. A. Ackoglu.* Canad. J. Math. 1975. V. 27. P. 1075.
[2] *A. Ionescu-Tulcea.* Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. № 3. P. 366.
[3] *В. В. Козлов.* Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 602.
[4] *В. В. Козлов, Д. В. Трещев.* ТМФ. 2003. Т. 134. № 3. С. 388.
[5] *А. Пуанкаре.* Замечания о кинетической теории газов. В сб.: А. Пуанкаре. Избранные труды. Т. III. М.: Наука, 1974. С. 385.
[6] *V. V. Kozlov.* Regul. Chaotic Dyn. 2001. V. 6. № 3. P. 235.
[7] *В. В. Козлов, Д. В. Трещев.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
[8] *Я. Г. Синай.* УМН. 1970. Т. 25. № 2. С. 141.
[9] *D. Szász.* Sci. Math. Hungarica. 1996. V. 31. № 1–3. P. 299.
[10] *U. Krengel.* Ergodic Theorems. Berlin: Gruyter, 1985.
[11] *В. В. Немыцкий, В. В. Степанов.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1949.

Поступила в редакцию 17.XII.2002 г.,
после доработки 21.IV.2003 г.