

## НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ С ПОТЕНЦИАЛОМ ДАЙСОНА

© 1999 г. А. В. Борисов, член-корреспондент РАН В. В. Козлов

Поступило 21.10.98 г.

1. Динамика системы  $n$  взаимодействующих частиц равной массы описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i < j} y_i^2 + \sum V(x_i - x_j). \quad (1)$$

Здесь  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – координаты,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – импульсы частиц,  $V$  – потенциальная энергия взаимодействия. Мы будем, следуя Дайсону [1], рассматривать случай, когда

$$V(z) = \ln|\sin z|. \quad (2)$$

Системы с таким потенциалом изучались в работе [1] в связи с анализом статистических свойств уровней энергии одномерного классического кулоновского газа. Аналогично ситуации, отмеченной Калоджеро для системы точечных вихрей на плоскости [2], положения равновесия системы (1), (2) определяют стационарные коллинеарные конфигурации на сфере (точечные вихри располагаются в экваториальной плоскости, равномерно вращающейся вокруг некоторой оси, также лежащей в этой плоскости).

Поскольку функция  $V$   $2\pi$ -периодична (она даже  $\pi$ -периодическая), то можно считать, что частицы движутся по окружности. Система с гамильтонианом (1) всегда допускает два интеграла

$$H, \quad F = \sum y_i.$$

Отысканию условий на потенциал  $V$ , при котором рассматриваемая система вполне интегрируема (допускает набор из  $n$  независимых интегралов, полиномиальных по импульсам  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ), посвящено большое число работ (см. обзоры в [2, 7]). Если  $V$  – непостоянная аналитическая периодическая функция без сингулярностей, то при  $n \geq 3$  система с гамильтонианом (1) не может быть вполне интегрируемой [3, 4]. Потенциал Дайсона (2) имеет вещественную логарифмическую особенность. Задача об интегрируемости этой системы обсуждалась в работе [5].

Как отметил Дайсон, система с потенциалом (2) допускает семейство равновесий

$$x_j^0 = x_0 + \frac{\pi j}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Частоты малых колебаний, вычисленные в [6],

$$\omega_s^2 = 2s(n-s), \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Равенство  $\omega_n = 0$  связано с неизолированностью равновесий (3).

2. Рассмотрим простейший нетривиальный случай, когда  $n = 3$ . С помощью интеграла момента  $F$  можно понизить число степеней свободы на единицу. Для этого перейдем к неинерциальной барицентрической системе отсчета с помощью канонического преобразования  $x, y \rightarrow q, p$ :

$$y_1 = p_1 + p_3, \quad y_2 = -p_1 + p_2 + p_3, \quad y_3 = -p_2 + p_3,$$

$$q_1 = x_1 - x_2, \quad q_2 = x_2 - x_3, \quad q_3 = x_1 + x_2 + x_3.$$

С учетом равенства  $p_3 = 0$  и четности потенциала гамильтониан редуцированной системы имеет вид

$$H = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + V(q_1) + V(q_2) + V(q_1 + q_2). \quad (5)$$

Эта система имеет устойчивое равновесие  $q_1 = q_2 = \frac{\pi}{3}$  с равными частотами малых колебаний  $\omega_1 = \omega_2 = 2$  (согласно (4)). Вычитая из потенциала  $\ln \frac{\sqrt{3}}{2}$ , можно считать, что в состоянии равновесия полная энергия равна нулю.

Естественно ожидать, что при малых положительных значениях полной энергии  $h$  система с потенциалом (2) будет демонстрировать интегрируемое поведение. Ситуация здесь точно такая же, как и в известной системе Хенона–Хейлеса ([6], см. также [7]). Применяя метод нормальных форм с учетом резонанса  $\omega_1 = \omega_2$ , можно найти квазиинтеграл, который очень медленно меняется со временем в окрестности положения равновесия (для системы Хенона–Хейлеса такую функцию вычислил Густавсон [8]).

3. Численные расчеты подтверждают это предположение. На рис. 1а показано почти интегрируемое поведение системы при  $H = 10$ . Для больших  $H$  система хаотизируется в окрестности сепаратрис. При этом формальные ряды, определяющие квазиинтеграл, расходятся, и для больших  $H$  он не аппроксимирует поведение системы. Рисунки 1б, 1в соответствуют значениям энергии

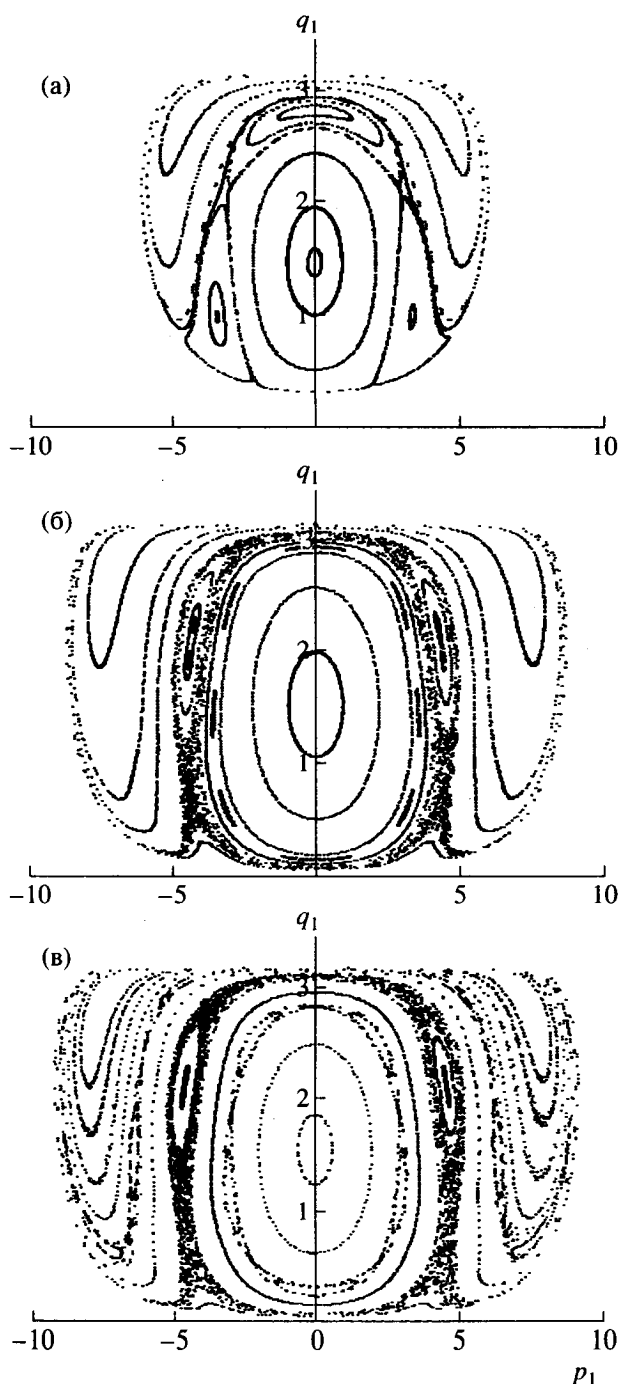


Рис. 1. Сечение Пуанкаре для энергии  $H = 10$  (а),  $20$  (б),  $22$  (в).

$H = 20$  и  $H = 22$ , при которых начинается реальная стохастизация системы.

4. К задаче об интегрируемости системы взаимодействующих частиц с потенциалом Дайсона можно подойти с более простой точки зрения, считая канонические координаты  $x$ ,  $y$  и время  $t$  комплексными переменными. Будем разыскивать первые интегралы в виде полиномов по импульсам с однозначными аналитическими коэффициента-

ми (см. [3]). Ввиду логарифмической особенности потенциалов энергия  $H$  ветвится в комплексном фазовом пространстве, а функция  $F$ , конечно, будет однозначной.

Оказывается, интеграл момента  $F$  – единственный полиномиальный интеграл с однозначными коэффициентами в системе Дайсона. Это утверждение доказывается с помощью результатов работы [9].

Действительно, пусть  $F_j = y_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , – полный набор независимых интегралов в задаче о движении частиц по окружности без взаимодействия. Вычислим производные этих функций в силу гамильтоновой системы с гамильтонианом (1), (2):

$$\dot{F}_j = \sum_{k=1}^n \text{ctg}(x_j - x_k), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (6)$$

Подставим теперь в правую часть этих равенств какое-нибудь решение “свободной” системы, например

$$x_1 = \frac{\pi}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{n}, \quad x_n = t.$$

Тогда правые части (6) будут мероморфными функциями на плоскости комплексного времени,

причем  $n - 1$  точек  $t = \frac{\pi}{n}, \dots, t = \frac{(n-1)\pi}{n}$  будут простыми полюсами. Вычисляя вычеты в этих

точках для функции  $(\dot{F}_j)_t$ , нетрудно заметить, что они (как векторы  $\mathbb{C}^n$ ) линейно-независимы. Следовательно, согласно [9], рассматриваемая система может иметь только один однозначный полиномиальный первый интеграл.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00747) и Федеральной целевой программы “Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки” (проект 294).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dyson F.J. // J. Math. Phys. 1962. V. 3. № 1. P. 140–156; P. 157–165; P. 166–175.
2. Calogero F. In: Lect. NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Equations in Physics and Mathematics. Istanbul, 1977. P. 3–53.
3. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995. 430 с.
4. Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990. 237 с.
5. Calogero F., Perelomov A.M. // Commun. Math. Phys. 1978. V. 59. P. 109–116.
6. Hénon M., Heiles C. // Astron. J. 1964. V. 69. P. 73–79.
7. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 168 с.
8. Gustavson F. // Astron. J. 1966. V. 71. P. 670–686.
9. Козлов В.В. // ПММ. 1998. Т. 62. № 1. С. 3–11.