УДК 531.31

В. В. КОЗЛОВ

119899, Россия, Москва, Воробьевы горы,
Московский государственный университет
механико-математический факультет,
кафедра теоретической механики
E-mail:vako@nw.math.msu.su

УСРЕДНЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ УСТОЙЧИВЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ

Поступила в редакцию 1 сентября 1997 г.

В работе изучается операция усреднения гладких функций вдоль точных траекторий динамических систем в окрестности устойчивых нерезонансных инвариантных торов. После усреднения получается первый интеграл, однако, в типичной ситуации среднее разрывно или даже не всюду определено. Если временное среднее было бы гладкой функцией, то она принимала бы стационарные значения в точках невырожденных инвариантных торов. В работе показано, что этот результат можно сделать корректным, если операции усреднения и дифференцирования по начальным данным поменять местами. Для неустойчивых торов это свойство в общем случае отсутствует. Обсуждается роль условия приводимости инвариантных торов, а также возможность обобщения на случай произвольных компактных инвариантных многообразий, на которых исходная динамическая система эргодична.

Владимиру Игоревичу Арнольду
к его шестидесятилетию

1. Инвариантные торы

Рассмотрим динамическую систему на n-мерном многообразии M, определяемую дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = v(z), \quad z \in M^n. \tag{1.1}$$

Здесь v-гладкое поле на M. Предположим, что система (1.1) имеет инвариантную k-мерную поверхность в виде тора $T^k = \{x_1, ..., x_k \bmod 2\pi\}$ с условно-периодическими движениями. Это означает, что в подходящих угловых переменных $x \bmod 2\pi$ уравнения (1.1) на T^k имеют следующий простой вид:

$$\dot{x}_1 = \omega_1, ..., \dot{x}_k = \omega_k; \quad \omega = \text{const}. \tag{1.2}$$

Тор называется *нерезонансным,* если между частотами ω нет нетривиальных соотношений

$$(l, \omega) = l_1\omega_1 + ... + l_k\omega_k = 0, \quad l \in Z^k \backslash \{0\}.$$

При отсутствии резонансов система (1.2) будет эргодической.

В n-мерной окрестности тора T^k удобно ввести координаты $x_1, ..., x_k \bmod 2\pi$ и $y_1, ..., y_m$ $(m = n - k)$, где y — локальные координаты в направлениях трансверсальных T^k, причем в координатах x, y уравнение поверхности T^k имеет вид: $y_1 = \ldots = y_m = 0$. В этих координатах дифференциальные уравнения (1.1) принимают следующую форму:

$$\dot{x} = \omega + V(x,y), \quad \dot{y} = \Omega y + W(x,y), \tag{1.3}$$

где V, W — гладкие вектор-функции в окрестности T^k, причем

$$V(x,0) = 0, \quad W = O\left(|y|^2\right),$$

матрица Ω размером $m \times m$ 2π-периодически зависит от x. Инвариантный тор называется *приводимым,* если можно так выбрать переменные x, y, чтобы матрица Ω была постоянной. Согласно известной теореме Ляпунова—Флоке [1] при $k = 1$ (замкнутая траектория) всегда имеет место приводимость. Если $m = 1$, то тор также будет приводимым, если частоты ω *сильно несоизмеримы* (см. [2], гл. IV). В общем случае проблема приводимости является сложной и до конца не решенной задачей (см. по этому поводу работы [3,4]). В дальнейшем инвариантные торы предполагаются инвариантными и приводимыми. Возможность обобщения сформулированных ниже результатов на неприводимый случай обсуждаются в п. 4.

Приводимый тор называется *невырожденным,* если среди собственных чисел матрицы Ω нет чисел вида $\imath(l, \omega)$, $l \in Z^k$. В частности, $\det \Omega \neq 0$. Как показано в [2], все точки невырожденного инвариантного тора являются *критическими* (*стационарными*) для любого гладкого интеграла системы (1.1). Этот результат обобщает известную теорему Пуанкаре о свойствах невырожденных периодических траекторий ([5], гл. IV).

Линейные уравнения

$$\dot{y} = \Omega y \tag{1.4}$$

называются *уравнениями в вариациях* для инвариантного тора T^k. Если все решения (1.4) ограничены при $t \geqslant 0$, то инвариантный тор называется *устойчивым* (в первом приближении).

2. Усреднение в окрестности инвариантных торов

Пусть

$$z \to f(z) \tag{2.1}$$

— гладкая функция на M,

$$t \to z(t, z_0) \tag{2.2}$$

— решение (1.1) с начальным условием $z_0 : z(0, z_0) = z_0$. Их композиция

$$t \to f\left(z(t, z_0)\right)$$

будет функцией времени t, зависящей от точки $z_0 \in M$ как параметра.

Средним значением функции (2.1) вдоль решения (2.2) называется число

$$F(z_0) = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau f\left(z(t, z_0)\right) dt,$$

если, конечно, этот предел существует. Если M компактно и система (1.1) допускает инвариантную меру, то (согласно эргодической теореме Биркгофа) временное среднее F определено почти всюду. Однако функция F может оказаться разрывной, и, более того, ее точки разрыва могут всюду плотно заполнять фазовое пространство M. Рассмотрим, например, невырожденную вполне интегрируемую систему. Ее фазовое пространство расслоено на многомерные инвариантные торы, причем резонансные и нерезонансные торы всюду плотны. Оказывается временное среднее любой непрерывной функции непрерывно на нерезонансных торах и, вообще говоря, разрывно в точках, лежащих на резонансных торах (см. [6], гл. VII).

Среднее F, очевидно, постоянно на траекториях системы (1.1). Если эта функция окажется гладкой, то она будет первым интегралом уравнений (1.1). В этом случае, согласно п. 1, в точках невырожденных инвариантных торов $dF = 0$. Ниже будет показано, что этому результату можно придать содержательный смысл даже в тех случаях, когда функция $z \to F(z)$ разрывна или вообще не определена.

Положим

$$F(z_0, \tau) = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau f\left(z(t, z_0)\right) dt \tag{2.3}$$

— среднее функции f вдоль решения $z(t, z_0)$ за время τ.

Теорема. *Пусть T^k — устойчивый и невырожденный инвариантный тор системы* (1.1) *и f — любая непрерывно дифференцируемая функция, заданная в окресности T^k. Тогда*

$$\lim_{\tau\to\infty} F'_z(z_0, \tau) = 0 \tag{2.4}$$

для всех $z_0 \in T^k$.

Для замкнутых траекторий (когда $k = 1$) этот результат установлен ранее в работе [7]. Указанная теорема представляет своеобразный вариационный принцип для поиска устойчивых инвариантных торов.

Для неустойчивых торов теорема не справедлива. Это показывает простой пример. Пусть $M^2 = R \times T^1$ — цилиндр с координатами $x \bmod 2\pi, y$, а система дифференциальных уравнений (1.3) имеет вид:

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = y.$$

Замкнутая кривая $y = 0$ представляет собой неустойчивый одномерный инвариантный тор. Положим $f = y$. Так как $y = y_0 e^t$, то

$$\frac{\partial F}{\partial y_0} = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau e^t dt \to +\infty,$$

когда $\tau \to \infty$.

3. Доказательство теоремы об усреднении

Пусть $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция. В окрестности инвариантного тора $y = 0$ ее можно представить в следующем виде:

$$f = g(x) + (h(x), y) + O\left(|y|^2\right),$$

где g — некоторая функция, а h — ковекторное поле на T^k. Функция g и поле h, разумеется, 2π-периодически зависят от переменных $x_1, \ldots, x_k$.

Пусть $x(t, x_0, y_0)$, $y(t, x_0, y_0)$ — решения системы (1.3) с начальными данными x_0, y_0. Ясно, что при $y_0 = 0$ матрицы Якоби

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial y}{\partial y_0}$$

равны соответственно E и $e^{\Omega t}$, где E — единичная $k \times k$ матрица, а $e^{\Omega t}$ — фундаментальная матрица линейных уравнений в вариациях (1.4). Так как $V(x, 0) = 0$, то все элементы матрицы $\partial x / \partial y_0$ обращаются в нуль при $y_0 = 0$. Аналогично поскольку $\dot{y} = 0$, когда $y = 0$, то при $y_0 = 0$ справедливо равенство $\partial y / \partial x_0 = 0$.

Используя эти наблюдения, для производной среднего (2.1) в точке $x_0, y_0 = 0$ получаем значение

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \frac{\partial g}{\partial x}\,dt, \tag{3.1}$$

где в подинтегральном выражении вместо x следует подставить $\omega t + x_0$. Так как частоты ω нерезонансны, то (по теореме Вейля) предел (3.1) при $\tau \to \infty$ существует и равен пространственному среднему

$$\frac{1}{(2\pi)^k}\int\limits_{T^k} \frac{\partial g}{\partial x}\,d^k x = 0.$$

Для производной среднего значения (2.1) по y_0 при $y_0 = 0$ справедлива формула

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \left(e^{\Omega t}\right)^T h\,(\omega t + x_0)\,dt. \tag{3.2}$$

Здесь символ «T» означает операцию транспонирования. Поскольку тривиальное решение $y = 0$ линейной системы (1.4) устойчиво по предположению, то матрица Ω приводится к диагональному виду, и все ее собственные значения либо чисто мнимые, либо лежат в левой полуплоскости. Поэтому будем считать, что матрица Ω диагональная. Ввиду равенства

$$\left(e^{\Omega t}\right)^T = e^{\Omega^T t}$$

символ транспонирования в (3.2) можно опустить.

Поскольку $e^{\Omega t}$ — фундаментальная матрица линейной системы (1.4), то анализ средних значений (3.2) сводится к исследованию интегралов вида:

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau e^{\lambda t}\phi\,(\omega t + x_0)\,dt, \tag{3.3}$$

где λ — собственное значение матрицы Ω, а ϕ — некоторая непрерывная функция на T^k.

Если $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то $e^{\lambda t} \to 0$ при $t \to \infty$, и (ввиду ограниченности ϕ) среднее (3.3) также стремится к нулю при $\tau \to \infty$ (теорема Коши). Пусть теперь λ — чисто мнимое число, не равное нулю. Так как среднее значение от $e^{\lambda t}$ стремится к нулю при $\tau \to \infty$ и λ не совпадает ни с одним из чисел $\imath\,(l,\omega)$, $l \in Z^k$, то среднее (3.3) также стремится к нулю. Последнее утверждение просто доказывается точно также, как классическая теорема Вейля о равномерном распределении.

Этот факт является следствием одного более общего утверждения. Пусть $t \to \phi\,(t)$ — почти-периодическая функция, представимая своим рядом Фурье

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \phi_s e^{\imath\mu_s t}, \quad \mu_s \in R.$$

Совокупность чисел $\{\mu_s\}$ называется *спектром* функции ϕ. Если ϕ — условно-периодическая функция, то ее спектр порождается конечным набором частот: $\mu = (l,\omega)$, $l \in Z^k$. Для каждой почти-периодической функции определено ее среднее значение

$$\langle\phi\rangle = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \phi\,(t)\,dt.$$

Пусть

$$\psi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_j e^{\nu_j t}, \quad \nu_j \in R$$

— еще одна почти-периодическая функция. Легко показать, что если их спектры $\{\mu_s\}$ и $\{\nu_j\}$ не пересекаются, то

$$\langle \phi\psi \rangle = \langle \phi \rangle \langle \psi \rangle \tag{3.4}$$

(т. е. в среднем интеграл от произведения равен произведению интегралов). Это свойство обычно связывают с проявлением статистической независимости.

В нашем случае $\psi = e^{\lambda t}$, где $\lambda = \imath\nu$ — чисто мнимое число, отличное от нуля. По предположению, ν не принадлежит спектру функции ϕ и, очевидно, $\langle \psi \rangle = 0$. Следовательно, согласно (3.4), $\langle \phi\,\psi \rangle = 0$.

4. Заключительные замечания

При попытке распространить теорему п. 2 на случай неприводимых инвариантных торов мы сталкиваемся с проблемой конструктивного определения невырожденности. В этом случае в уравнениях (1.4) матрица Ω условно-периодически зависит от времени. Если ограниченные решения (1.4) были бы почти-периодическими функциями, то достаточно потребовать, чтобы их спектры не содержали чисел вида $i\,(l,\omega)$, $l \in Z^k$. К сожалению, это условие практически не поддается проверке, и к тому же ограниченные (и не стремящиеся к нулю) решения системы (1.4) не обязаны быть почти-периодическими функциями. Устойчивый неприводимый тор $y = 0$ можно назвать *невырожденным,* если $\langle y_s(t)\,\phi(t) \rangle = 0$, $s = 1,...,m$ для всех условно-периодических функций ϕ с нерезонансным набором частот $\omega_1,\ldots,\omega_k$. Для невырожденных в этом неконструктивном смысле инвариантных торов теорема п. 2 остается справедливой.

Можно попытаться заменить нерезонансный инвариантный тор более общим компактным инвариантным многообразием N^k, на котором исходная система эргодическая (или даже обладает более сильным свойством перемешивания). В качестве таких систем можно взять У-системы Аносова, имеющие экспоненциальную неустойчивость. Они допускают всюду плотное множество гиперболических периодических орбит, и поэтому соотношение (2.2) не может быть справедливым для всех точек на N (см. пример из п. 2). При некоторых дополнительных предположениях заключение теоремы выполнено почти всюду на N.

Вопросы применения усреднения вдоль точных решений для поиска устойчивых замкнутых орбит обсуждаются в книге [8] и в работе [7], где можно найти дополнительные ссылки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 96–01–00747), INTAS (№ 93–339–ext), а также программы «Университеты России» (3.3.25).

Литература

[1] *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения // М.: Наука. 1972.

[2] *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике // Ижевск: Изд-во Удм. Ун-та. 1995.

[3] *Jorba A., Simo C.* On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients // J. Diff. Eq. 1992. V. 98. P. 111–124.

[4] *Treshchev D. V.* An Estimate of Irremoveable Nonconstant Terms in the Reducibility Problem // In: Dynamical Systems in Classical Mechanics. Transl. Amer. Math. Soc. Ser. 2. V. 168. P. 91–128.

[5] *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // В кн.: Избранные труды. Т. I. М.: Наука. 1972.

[6] *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела // М.: Изд-во Моск. Ун-та. 1980.

[7] *Козлов В. В.* Усреднение в окрестности устойчивых периодических движений // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 3. С. 567–570.

[8] *Белецкий В. В., Хентов А. А.* Вращательное движение намагниченного спутника // М.: Наука. 1985.

V. V. KOZLOV

AVERAGING IN A NEIGHBORHOOD OF STABLE INVARIANT TORI

Received September 1, 1997

We analyse the operation of averaging of smooth functions along exact trajectories of dynamic systems in a neighborhood of stable nonresonance invariant tori. It is shown that there exists the first integral after the averaging; however in the typical situation the mean value is discontinuous or even not everywhere defind. If the temporal mean were a smooth function it would take its stationary values in the points of nondegenerate invariant tori. We demonstrate that this result can be properly derived if we change the operations of averaging and differentiating with respect to the initial data by their places. However, in general case for nonstable tori this property is no longer preserved. We also discuss the role of the reducibility condition of the invariant tori and the possibility of the generalization for the case of arbitrary compact invariant manifolds on which the initial dynamic system is ergodic.