

О МНОГОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА

В. В. Козлов - Россия

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова
механико - математический факультет

1, Многозначные интегралы. Пусть

$$\dot{x} = v(x) \tag{1.1}$$

- динамическая система на гладком многообразии M . Многозначным интегралом системы (1.1) назовем замкнутую 1-форму φ такую, что локально $\varphi = df$, причем функция $f(x)$ - интеграл уравнений (1.1):

$$f = \int \varphi = \text{const}.$$

Ясно, что многозначные интегралы являются инвариантными 1-формами. Действительно,

$$L_v \varphi = L_v df = dL_v f = 0 \tag{1.2}$$

Здесь L_v - производная Ли, порождаемая векторным полем v .

Отметим, что обратное, вообще говоря, неверно: не каждая инвариантная замкнутая 1-форма будет многозначным интегралом. Действительно, из (1.2) вытекает лишь, что

$$L_v f = f = \text{const}.$$

Если первое число Бетти многообразия M равно нулю (т.е. $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$), то равенство $\varphi = df$, будет верно для некоторой гладкой функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. В этом случае все многозначные интегралы будут обычными однозначными интегралами.

Конечно, с локальной точки зрения (например, при явном интегрировании уравнений в квадратурах), нет никакого различия между однозначными и многозначными интегралами. Ситуация резко меняется, если мы изучаем систему в целом. Приведем простой пример эргодической системы с многозначными интегралами. Пусть M - двумерный тор $T^2 = \{x, y \text{ mod } 2\pi\}$ с угловыми координатами x, y , а система (1.1) задается уравнениями

$$\dot{x} = \alpha, \quad \dot{y} = \beta \tag{1.3}$$

$\alpha, \beta = \text{const}$, α / β иррационально. Эта система не допускает даже непрерывных непостоянных интегралов, определенных всюду на T^2 . Однако 1-форма $\varphi = \beta dx - \alpha dy$ будет, очевидно, многозначным интегралом.

Уравнения (1.3), конечно, не гамильтоновы. Однако соответствующие примеры можно привести и для уравнений Гамильтона. Положим

$$q_k = H / P_k, \quad P_k = -H / q_k; \quad k = 1, 2$$

$$H = \alpha P_1 + P_2 / \Phi(q_1, q_2). \tag{1.4}$$

Здесь $q_1, q_2 \text{ mod } 2\pi$ - угловые обобщенные координаты, p_1, p_2 - соответствующие импульсы, $\alpha = \text{const}$, Φ - положительная 2π -периодическая функция от q_1 и q_2 .

Таким образом, конфигурационное пространство - это двумерный тор

$$T^2 = \{q_1, q_2 \bmod 2\pi\},$$

а четырехмерное фазовое пространство имеет структуру прямого произведения $R^2 \times T^2$.
 Как сказано в [1], при подходящем выборе α и аналитической функции Φ система (1.4) не допускает однозначных интегралов, независимых от функции H . Причина заключается в том, что система (1.4) транзитивна на трехмерных уровнях энергии $H = \text{const}$.
 Между тем, уравнения Гамильтона (1.4) имеют многозначный интеграл

$$\varphi = dq_1 - \alpha dq_2,$$

наличие которого позволяет проинтегрировать эти уравнения в квадратурах.

2. Малые знаменатели. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = u_0 + u_1 + \dots, \quad \dot{y} = v_0 + v_1 + \dots, \quad \dot{z} = w_1 + \dots \quad (2.1)$$

Здесь x, y - угловые переменные, по которым правые части периодичны с периодами $2\pi, u_0, v_0$ зависят только от z , ϵ - малый параметр. Система такого вида очень часто встречается в приложениях и имеют фундаментальное значение для теории нелинейных колебаний (см., например, [2]).

Будем считать, что переменная z меняется в интервале $\Delta \subset R$. Поэтому фазовое пространство системы (2.1) - прямое произведение $\Delta \times T^2$. Всюду ниже предполагается, что правые части (2.1) - аналитические функции в $\Delta \times T^2$, аналитически зависящие от параметра ϵ .

При $\epsilon = 0$ система (2.1) имеет однозначный интеграл $F = z$ и на каждом инвариантном торе $\{z = z_0\}$ имеется многозначный интеграл

$$v_0(z_0) dx - u_0(z_0) dy.$$

Оказывается, при малых значениях $\epsilon \neq 0$ возмущенная система не имеет ни одного ненулевого многозначного интеграла.

Более точно, речь идет о многозначных интегралах вида

$$\varphi = A dx + B dy + C dz, \quad (2.2)$$

где A, B, C - аналитические функции на $\Delta \times T^2$, аналитически зависящие от ϵ . Такая постановка задачи в идейном плане восходит к Пуанкаре [3, гл. V].

Разложим функцию w_1 в ряд Фурье:

$$w_1 = \sum W_{mn}(z) \exp[i(m x + n y)].$$

В дальнейшем анализе важную роль играет множество $P \subset R = \{z\}$, состоящее из точек z , таких, что

$$(1) \quad m u_0(z) + n v_0(z) = 0 \text{ для некоторых целых } m, n, \text{ не равных одновременно нулю,}$$

$$(2) \quad W_{mn}(z) \neq 0.$$

Такие множества впервые рассматривались Пуанкаре [3, гл. v] в связи с изучением влияния резонансов на условия интегрируемости уравнений Гамильтона. В типичной ситуации резонансное множество P всюду плотно заполняет отрезок D . Это обстоятельство является серьезным препятствием для проведения системы (2.1) к "нормальной" форме (см., например [4]).

Теорема. Предположим, что

$$(A) \quad u_0 v_0 - u_0 v_0 \neq 0,$$

(B) множество P имеет хотя бы одну предельную точку, лежащую в D .

Тогда система (2.1) не имеет нетривиальных аналитических многозначных интегралов: $\varphi = 0$.

Условие (A) + (B) является известным условием отсутствия однозначных аналитических интегралов (см. [5]). Как показано в [6], при этих предположениях уравнения (2.1) не допускают

32 нетривиальных полей симметрий. Наконец, если дополнительно потребовать выполнения условия
(C) $W_{00}(z) \neq 0$,

то уравнения (2.1) не имеют линейных интегральных инвариантов (как абсолютных, так и относительных) [7].

Доказательство. Рассмотрим естественное накрытие фазового пространства системы
(2.1)

$$\Delta x \mathbb{R}^2 \rightarrow \Delta x \mathbb{T}^2.$$

На множестве $\Delta x \mathbb{R}^2$ замкнутая форма (2.2) точна:

$$\varphi = dF(x, y, z).$$

Нетрудно показать, что функция $F: x \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ имеет следующий вид:

$$F = a(x) + b(y) + f(x, y, z). \quad (2.3)$$

Здесь a, b - аналитические функции только от параметра E , а аналитическая функция f 2π -периодична по x, y .

Положим

$$a = a_0 + a_1 + \dots, \quad b = b_0 + b_1 + \dots,$$

$$f = f_0 + f_1 + \dots$$

Дифференцируя интеграл (2.3) в силу системы (2.1) и полагая затем $\dot{z} = 0$, получаем:

$$a_0 u_0 + b_0 v_0 + f_0 / x u_0 + f_0 / y v_0 = 0. \quad (2.4)$$

Усредняя это равенство по тору \mathbb{T}^2 , получаем тождество
 $a_0 u_0(z) + b_0 v_0(z) = 0$.

В силу условия (A) отсюда вытекает, что $a_0 = b_0 = 0$.

Разложим функцию f_0 в ряд Фурье:

$$f_0 = \sum F_{mn}^0(z) \exp[i(mx + ny)].$$

Из (2.4) вытекает цепочка равенства:

$$(m u_0 + n v_0) F_{mn}^0(z) = 0.$$

Так как в аналитических функций нет делителей нуля, то с учетом условия (A) получаем, что $F_{mn}^0 = 0$ для всех $m^2 + n^2 \neq 0$. Итак, f_0 зависит лишь от переменной z .

Приравнявая в равенстве $F = 0$ слагаемые первой степени по z , получаем соотношение
 $a_1 u_0 + b_1 v_0 + f_0 w_1 + f_1 / x u_0 + f_1 / y v_0 = 0$. (2.5)

Пусть

$$f_1 = \sum F_{mn}(z) \exp[i(mx + ny)].$$

Если $m^2 + n^2 \neq 0$, то из (2.5) вытекает, что

$$f_0 W_{mn} + i(mu_0 + nv_0) F_{mn} = 0$$

Пусть $z \in P$. Тогда $f_0(z) = 0$. Так как бесконечное множество P имеет предельную точку в области аналитичности функции f_0 , то $f_0(z) = 0$.

Аналогично доказывается, что коэффициенты a_1, b_1, \dots равны нулю, а $f_1, \dots = \text{const}$.

Следовательно, $j \in J = \emptyset$.

Теорема доказана.

3. Приложения к гамильтоновым системам. Рассмотрим канонические уравнения

Гамильтона с гамильтонианом

$$H = \sum H_0(I_1, I_2) + H_1(I_1, I_2, j_1, j_2) + \dots \quad (3.1)$$

Здесь $I, \varphi \bmod 2\pi$ - переменные действие - угол невозмущенный (когда $\epsilon = 0$) вполне интегрируемой системы.

Зафиксируем значение полной энергии h . Если кривая

$$H_0(I_1, I_2) = h \quad (3.2)$$

регулярна, то (по крайней мере локально) уравнение $H = h$ при малых значениях ϵ можно разрешить относительно I_1 или I_2 .

Это обстоятельство позволяет записать возмущенные Гамильтона в виде (2.1).

Условие (A) эквивалентно условию изознергетической невырожденности невозмущенной системы (аналитическую запись можно найти, например, в [5]). Геометрически это означает, что линия уровня (3.2) не есть прямая.

Пусть

$$H_1 = \sum H_{mn}(I_1, I_2) \exp [i(m\varphi_1 + n\varphi_2)].$$

Положим

$$B = \{I : m\omega_1 + n\omega_2 = 0, H_{mn} \neq 0\},$$

где $\omega_k = H_0' / I_k$ ($k = 1, 2$) - частоты невозмущенной задачи. Легко показать (см., например, [8, гл. 1]), что множество P является пересечением "векового" множества B с линией уровня (3.2).

Таким образом, типичные гамильтоновы системы с гамильтонианом (3.1) не допускают многозначных аналитических интегралов, аналитически зависящих от I . Это наблюдение усиливает классический результат Пуанкаре об отсутствии однозначных интегралов "основной проблемы динамики". Так Пуанкаре называл задачу исследования уравнений Гамильтона с гамильтонианом вида (3.1).

Добавление. Для гамильтоновых систем с многозначными интегралами справедлив аналог геометрической теоремы Лиувилля об интегралах в инволюции.

Прежде всего заметим, что корректно определена скобка Пуассона многозначных интегралов. Далее, поверхностью уровня многозначных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ естественно назвать интегральную поверхность интегрируемого распределения

$$\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0.$$

Если для гамильтоновой системы с n степенями свободы найдется n независимых многозначных интегралов, попарные скобки Пуассона которых равны нулю и $(2n - 1)$ -мерные энергетические многообразия компактны, то n -мерные поверхности уровня этих интегралов диффеоморфны прямому произведению $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, причем можно выбрать на них k угловых переменных и $n-k$ линейных, которые равномерно меняются со временем.

Если интегралы однозначны, то их совместные уровни компактны и тогда $k = n$. Условие компактности энергетических многообразий гарантирует, что гамильтоновы поля, порожденные многозначными интегралами, не стеснены на n -мерных совместных поверхностях уровня.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (93 - 013 - 16244) и ISF (MCYOO).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kozlov V.V. Phenomena of Nonintegrability in Hamiltonian Systems // Proc.Congr.Math., Berkeley (USA), 1987, P.1161-1170.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю.Ф. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: наука. 1974.
3. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. В кн.: Избр.труды, Т.1.М.: Наукаю 1971.
4. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштад А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИБ 1985.
5. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38, вып.1. С.3-67.
6. Козлов В. В. О группах симметрий динамических систем // ПММ. 1988. Т. 52, вып.4. С.531-541.
- 7.Kozlov V.V. Dynamical systems Determined by the Navier-Stokes Equations // Rus.J.Math.Phys.1993.V.1,n1, p.57-69.
8. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во Моск.Ун-та. 1980.

Козлов Валерий Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, специалист в области теоретической механики и в смежных областях: качественной теории дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и топологии, вариационного исчисления. Им опубликовано свыше 110 научных работ, среди которых четыре монографии.

Лауреат Государственной премии Российской Федерации, премии АН СССР им.С.А.Чаплыгина, Ломоносовской премии и премии Ленинского комсомола. Был приглашенным докладчиком на Международном конгрессе математиков в Беркли (США). Действительный член Международной академии наук высшей школы.