П.Г. Гриневич, С.П. Новиков

Дискретные SL_n связности и самосопряжённые разностные операторы на двумерных многообразиях.

Аннотация. *Программа построения дискретных аналогов знаменитых вполне интегрируемых систем и ассоциированных с ними линейных операторов начала реализовываться в 1990-е годы. В частности, свойства разностных операторов второго порядка на триангулированных многообразиях и правильных треугольных решетках изучались в работах С.П. Новикова и И.А. Дынникова начиная с 1996 года. При этом исследовались так называемые преобразования Лапласа, новые дискретизации комплексного анализа и новые дискретизации GL_n связностей на триангулированных n-мерных многообразиях. Была развита общая теория дискретных GL_n связностей "ранга один" (см определение во введении). Задача выделения подкласса SL_n-связностей (и унимодулярных $SL_n^{\pm}$ связностей, удовлетворяющих условию* $\det A = \pm 1$*), решена не была. Как показано в нашей работе, эти связности играют важную роль в теории самосопряжённых разностных операторов Шредингера на правильных треугольных решетках в $\mathbb{R}^2$, аналогичную роли магнитных полей в непрерывном случае. В Приложении 1 нами найдена полная характеризация унимодулярных $SL_n^{\pm}$ связностей ранга 1 для всех $n > 1$ и тем самым исправлена ошибка (Мы утверждали ранее, что при $n > 2$ они сводятся к канонической связности). Основываясь на информации, сообщенной авторам И.Г. Корепановым, мы полностью проясняем связь классической теории электрических цепей и преобразования звезда-треугольник с дискретными преобразованиями Лапласа на треугольных решетках.*[1]

[1]Работы С.П. Новикова по указанной тематике (часть из них выполнена в соавторстве с другими учеными) доступны на его персональной странице по адресу *www.mi.ras.ru/~snovikov*, статьи номер 36, 137, 138, 140, 146, 148, 159, 163, 173, 174, 175. Для перехода к списку работ кликните Scientific Publications.

Посвещается памяти И.М. Гельфанда
в связи с его 100-летием

Содержание

1 Введение. Дискретные GL_n связности.

Понятие дифференциально-геометрической связности в расслоениях имеет два источника:

Во-первых, это **Голономия**, то-есть параллельный перенос точки слоя вдоль пути в базе, результат которого принадлежит группе G. Дискретизация этой идеи очевидна. Следует просто приписать ориентированному ребру элемент группы G. Отдельно физики решают вопрос том, как приписать связности (полю Янга-Миллса) "Функционал Действия".

Для этого удобно работать с комплексами, где двумерный остов состоит из квадратов. Физики раньше работали с правильнми решетками, но познее расширили класс. Группа в теории частиц компактна, так что определение действия включает форму Киллинга.

Второй источник–это переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Именно его дискретизация развивается нами. Именно эта дискретизация возникает при построении оптимальной дискретизации уравнения Шредингера, сохраняющей фундаментальное свойство “Факторизации”.

Поясним вкратце основные понятия.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial x_l} = A^i_{kl}(x)\psi^k(x)$$

или

$$\partial_l \Psi(x) = A_l(x)\Psi(x)$$

в векторной форме. Здесь $i, k = 1, 2, ...m, \quad l = 1, ..., n$. Эта система вообще говоря переопределена при $n > 1$. Препятствием к разрешимости является ненулевая **Кривизна**, возникающая как коммутатор

$$R_{ij} = [\partial_i - A_i, \partial_j - A_j]$$

Матричная форма $A = A_i dx^i$ и определяет связность. Решения уравнения вдоль пути дает параллельный перенос. Кривизна имеет вид

$$R = R_{ij} dx^i \wedge dx^j = dA + A \wedge A$$

(произведения дифференциалов внешние). Для группы $U_m \subset GL_m(C)$ мы имеем $\bar{A}^t_l = -A_l$. Выражения TrR^s дают базис среди полиномов от классов Черна (над полем рациональных чисел). Для

$$SO_m \subset GL_m(\mathbb{R}), s = 2p, A^t_l = -A_l,$$

мы получим полиномы от классов Понтрягина. При калибровочных преобразованиях $\Psi = B(x)\Phi(x)$ мы имеем

$$A_l \to B^{-1} A_l B - B^{-1} \partial_l B$$

$$R_{ij} \to B^{-1} R_{ij} B$$

Как видно, классы Черна и Понтрягина не меняются. Это–замкнутые скалярно-значные формы.

Как дискретизировать этот подход к идее связности? Определим класс операторов первого порядка, служащий нашим целям.

Рассмотрим некоторый симплициальный комплекс M^n–тригулированное многообразии. Зафиксируем семейство n-мерных симплексов X. Каждой паре (T,P), где T-это n-мерный симплекс семейства X, а P-любая его вершина, поставлена в соответствие $r \times r$ невырожденная матрица $\det u_{T:P} \neq 0$.

По эти данным определим разностный оператор первого порядка Q, отображающий вектор-функции на вершинах в вектор-функции на n-мерных симплексах из семейства X, формулой

$$Q\psi_T = \sum_P u_{T:P}\psi_P$$

Определение 1. Дискретная GL_{rn}-связность ранга r задается уравнением $Q\psi = 0$, где семейство симплексов X состоит из всех n-симплексов. Её коэффициенты определены с точностью до калибровочного преобразования, задаваемого парой невырожденных r-матричных функций g_T, h_P, определённых на n-симплексах и вершинах соответственно:

$$\psi \to h_P\psi_P, u_{T:P} \to g_T u_{T:P} h_P^{-1}, Q \to g_T Q h_P^{-1}$$

Фактически связность зависит только от отношений

$$\mu^T_{PP'} = u^{-1}_{T:P} u_{T:P'}, \mu^T_{PP'} \to h_P \mu^T_{PP'} h^{-1}_{P'}$$

Проблема восстановления связности по данным голономии, как и само определение голономии, даны ниже. Важно отметить здесь, что в нашем дискретном случае имеется два вида голономии, в отличие от непрерывного случая (определение см ниже):

1.**Неабелева Голономия** из группы GL_{rn} определена для всех **Толстых Путей**, составленных из n-симплексов $T_0 ... T_m$, таких что пересечение $T_i \bigcap T_{i-1} = F_i$ является их общей $(n-1)$– гранью (см Рис 1).

2. **Оснащенная Голономия, называемая также Абелевой для Ранга Один**, определена для всех **Оснащенных Путей** $P_0 P_1 ... P_m T_1 ... T_m$, где ребра $P_{i-1}P_i$ принадлежат симплексам T_i (см Рис 2).

В наших работах исследовались связности ранга 1. Все существенные результаты относятся к этому случаю.

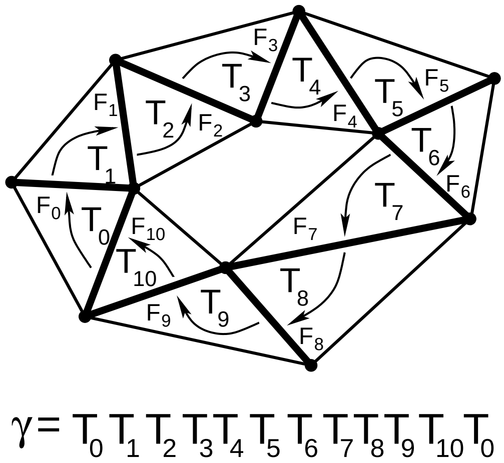

Рис. 1: Замкнутый толстый путь.

Простейшая **Связность Четности** – это отображение, сопоставляющее каждому замкнутому толстому пути γ (см ниже определение) его "четность" $P(\gamma) = (-1)^{m(\gamma)}$, где $m(\gamma)$ – число n-симплексов в толстом пути γ.

Очевидно, что связность четности тривиальна тогда и только тогда, когда n-симплексы допускают чёрно-белую раскраску. В предшествующих работах мы называли такую раскраску **Дискретной Конформной Структурой.** Далее мы будем всегда считать, что мы работаем с SL_n-связностями ранга один, если связность четности тривиальна и $SL_n^{\pm}$-связностями, если она нетривиальна (в некоторых случаях мы будем опускать в формулах индекс $\pm$).

Каноническая Связность соответствует случаю, когда все коэффициенты $u_{T:P}$ равны 1.

При задании связности $Q\psi = 0$, как уже отмечалось, играют роль лишь отношения коэффициентов оператора Q. В случае ранга 1 мы имеем

$$\mu^T_{PP'} = u_{T:P}/u_{T:P'}.$$

"Оснащенный путь" это набор $\gamma^{fr} = [P_0 P_1 ... P_m; T_1, T_2 ..., T_m]$ где $P_{i-1}P_i$ – ребро в n-симплексе $T_i, i = 1, ..., m$.

Каждая связность ранга r порождает **оснащённое представление голономии**: каждому оснащённому пути γ^{fr} ставится в соответствие r-

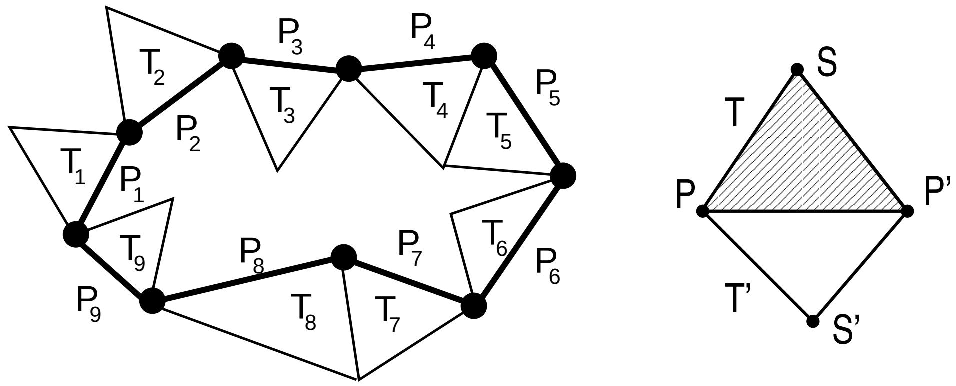

Рис. 2: Замкнутый длинный оснащенный путь и замкнутый короткий оснащенный путь.

матрица

$$\gamma^{fr} \to \prod_i \mu^{T_i}_{P_{i-1}P_i} = \mu(\gamma^{fr}).$$

Мы имеем отображение полугруппы замкнутых оснащенных путей с фиксированной начальной точкой P_0 в группу $GL_r(k)$ для нашего основного поля k. В нашей работе мы ограничимся абелевым случаям $r = 1$, причем, все $u_{PP'} > 0$, то-есть $u \in \mathbb{R}^+ \subset k^* = R^*$:

$$\mu : \Omega_{framed} \to \mathbb{R}^+.$$

Интересный случай $k = C$ мы изучим позже. Неоднозначность извлечения квадратного корня приводит к дополнительным небольшим топологическим трудностям.

Указанное отображение не зависит от выбора начальной точки для $r = 1$, поскольку оснащенная голономия абелева. **Все выражения** $\mu(\gamma^{fr})$ **калибровочно инвариантны.** Простейший инвариант такого типа:

$$\rho^{TT'}_{PP'} = \mu^T_{PP'}\mu^{T'}_{P'P} = \rho^{T'T}_{P'P} = \mu^T_{PP'}/\mu^{T'}_{PP'}$$

получается, если рассмотреть оснащённый путь $\gamma^{fr} = [PP'P; TT']$. Эти инварианты определены и для неабелева случая, но для $r > 1$ их не хватает для решения задачи о восстановлении связности. Для $r = 1$ эта задача была решена в работе [9]. Мы приведем решение для наиболее простого случая $n = 2$.

Восстановление связностей ранга 1 в размерности $n = 2$. Для восстановления связности по инвариантам достаточно знать все функции $\rho_{PP'}^{TT'}$, а также, набор чисел $\mu(\gamma_j^{fr})$, отвечающий генераторам группы $H_1(M, Z)$. Соответствующая процедура описана в работе [9]. Эта процедура существенно упрощается в размерности $n = 2$, особенно в предположении, что многообразие ориентировано. Опишем указанный случай.

Рассмотрим двумерное ориентированное многообразие M.

Определим мультипликативную 2-коцепь $\rho(T)$ формулой:

$$\rho(T) = \prod_{R_q \in T} \rho_{R_q}^{TT_q}$$

где $T_q \bigcap T = R_q = ij, T = ijk$, R_q -ребро T. В работе [9] было доказано, что эта коцепь когомологична нулю. Действительно, в некомпактном случае это очевидно. Для компактных ориентированных многообразий легко проверить, что

$$\prod_{T \in M} \rho(T) = 1.$$

Согласно определению, $\rho(T) = \prod_{R_i} \rho_{R_i}^{TT_i}$, где R_i – все ориентированные ребра T и $T_i \bigcap T = R_i$. Поскольку $\rho_{ij}^{TT'} \rho_{ji}^{TT'} = 1$, мы видим, что наше произведение равно 1, что и означает когомологичность коцепи тривиальной.

Рассмотрим 1-цепь λ такую, что $\delta\lambda = \rho^{-1/2} > 0$. Мы видим, что

$$\lambda_{ij}\lambda_{jk}\lambda_{ki} = \rho^{-1/2}(T), T = ijk, \lambda_{ij}\lambda_{ji} = 1.$$

Полагая

$$\mu_{ij}^T = \lambda_{ij} \cdot (\rho_{ij}^{TT_q})^{1/2}$$

мы приходим к формуле для связности, найденной в работе [9].

Конечно же, коцепь λ определена неоднозначно: её можно умножить на произвольный коцикл. Однако, когомологические классы при этом не меняются, поскольку эти преобразования в точности соответствует абелевым заменам калибровок. Тем самым мы получаем инварианты связностей в группе $H^1(M)$, дополняющие “локальные” инварианты типа $\rho_{ij}^{TT'}$.

Неабелево представление голономии, как уже говорилось, определяется с использованием “толстых путей” (см Рис 1).

По определению, толстый путь $\gamma^{thick} = T_1 ... T_m = T_0$ – это последовательность n-симплексов таких, что пересечение любых двух соседей $F_i = T_i \bigcap T_{i+1} - n - 1$-мерная грань, причём $F_i \neq F_{i+1}$. Каждый замкнутый толстый путь порождает линейное отображение

$$K : \Omega_{thick}(M, T_0) \to GL_n(\mathbb{R})$$

по следующему правилу: на каждом n-симплексе T_i уравнение $Q\psi = 0$ порождает отображение пространства (r)-вектор-функций на вершинах грани F_i в пространство таких же функций на вершинах грани F_{i+1}. Мы рассматриваем композицию этих отображений начиная с $T_0 = T_m$.

Неабелева кривизна в точке P для $n = 2$ определена как неабелева голономия, отвечающая толстому пути $\gamma_P^{thick} = T_1 ... T_m$, составленному из всех 2-симплексов $T_i = PP_iP_{i+1}$, содержащих вершину P (см. Рис 3)

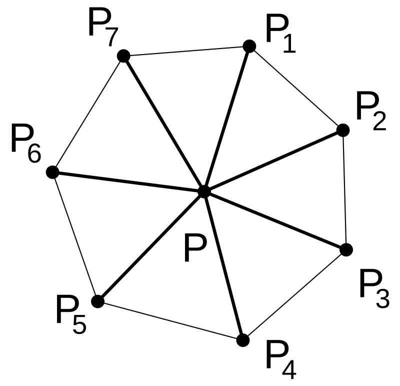

Рис. 3:

Это множество называется звездой вершины P: $St(P) = T_1 \bigcup T_1 \bigcup ... \bigcup T_m$. Неабелева кривизна для группы GL_2 и $r = 1$ – это верхнетреугольная 2×2-матрица $K(P, T_1)$ с диагональю $(1, \pm\mu_P)$, где $\mu_P = \mu(\gamma_P^{fr}))$ и второй ряд имеет вид $(\alpha(P_i, P), \pm\mu_P)$. Здесь γ_P^{thick} – замкнутый толстый путь ∂St_P, начинающийся и заканчивающийся в любой из вершин $P_i \in T_i \in St_P P_i \neq P$. Легко проверить справедливость следующей леммы:

Лемма 1. *Для замкнутого пути вокруг вершины P мы имеем*

$$\mu_P = \prod_{i=1,...m} \rho_{PP_i}^{T_iT_{i+1}},$$

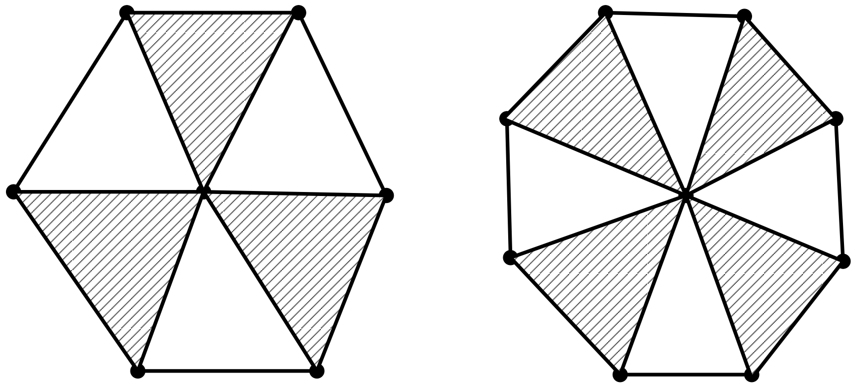

Рис. 4: Чёрно-белая раскраска звезды вершины.

где индекс i пробегает все значения по модулю m.

Приведем выражения коэффициентов неабелевой кривизны для всех n, следуя препринту С.П.Новикова (www.mi.ras.ru/ snovikov, кликнуть Scientific Publications, item 163 , стр 5-7. Эти результаты опубликованы в [9]).

Для всех $n \geq 2$ определется неабелева кривизна, используя звезду $St(\sigma^{n-2})$ для каждого $n-2$-мерного симплекса σ с вершинами $0, ..., n-2$. При этом возникают верхнетреугольные матрицы A_p перехода от грани σ, p к $\sigma, p+1$ точно также, как и при $n = 2$. Вершины звезды занумерованы номерами p для $n-1-$ граней σ, p, где p пробегает весь цикл $p = 1, 2, ..., m, 1$, как и для $n = 2$. Полное циклическое произведение по j матриц A_{p+j} и дает кривизну

$$K_{\sigma,p} = A_{p+m-1} .... A_p$$

вокруг симплекса коразмерности 2, с началом p. Она имеет диагональные члены вида

$$1, ..., 1, \mu_\sigma = \prod_{s=p}^{s=p+m-1} (-\mu_{s,s+1}^{T_{s+1}})$$

Здесь n-симплексы T_s имеют вид $\sigma, s-1, s$, где s считается по модулю m.

Последняя строка –единственно нетривиальная– имеет вид

$$\alpha_{\sigma,0,p}, ..., \alpha_{\sigma,m-2,p}, \mu_\sigma$$

Следующая формула выражает коэффициенты через связность:

$$\alpha_{\sigma,q,p} = \mu^{T_p}_{q,p} + \mu^{T_p}_{p-1,p}\mu^{T_{p-1}}_{q,p-1} + ... + \mu^{T_p}_{p-1,p}\mu^{T_{p-1}}_{p-2,p-1}...\mu^{T_{p-m+1}}_{q,p-m+1}$$

Калибровочно инвариантными являются величины

$$\alpha^*_{\sigma,q,p} = \alpha_{\sigma,q,p}\mu^{T_p}_{q,p}$$

Для них верна формула

$$\alpha^*_{\sigma,q,p+1} = -\alpha^*_{\sigma,q,p}/(\mu^{T_p}_{pq}\mu^{T_{p+1}}_{qp}) + 1 - \mu_\sigma$$

Эти величины выражаются через оснащенную голономию $\rho^{TT'}_{ij}$ по формуле:

$$\alpha^*_{\sigma,q,p} = \sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^k\prod_{j=0}^{j=k}\rho^{T_{p-j+1},T_{p-j}}_{p-j,q}$$

$$\prod_p \rho^{T_pT_{p+1}}_{qp} = (-1)^m\mu_\sigma$$

Мы видим из этой формулы, что для случая $SL^{\pm}_n$ связностей формула кардинально улучшается, так как $\mu_\sigma = 1$.

Решение проблемы редукции связности к группе $SL^{\pm}_n$ дается в данной работе.

Наши определения связности не позволяют эффективно выделить компактные группы, необходимые в физике частиц. Мы работаем с линейными операторами и используем эти идеи в терии дискретного оператора Шредингера в электрическом и магнитном полях, в размерности $n = 2$.

2 Оптимальная Дискретизация и Интегрируемые Системы.

Согласно нашему подходу, оптимальная дискретизация оператора должна сохранять черты, связывающие оператор с вполне интегрируемыми системами типа КдФ и изоспектральными деформциями типа пар Лакса – для $n = 1$– или троек Манакова (изучавшихся Дубровиным-Кричевером-Новиковым с 1976 года [8]) для $n = 2$, где деформации подвергается лишь один уровень энергии. В обоих случаях определяющим свойством хорошей дискретизации является сохранение свойства факторизуемости оператора, которое является источником возникновения дискретных почти изоспектральных преобразований, называемых **Преобразованиями Дарбу** для всех уровней энергии ($n = 1$), где нужна сильная факторизация, или **Преобразованиями Лапласа** одного уровня для $n = 2$, основанная на слабой факторизации (ниже).

$n = 1$ (Сильная факторизуемость):

$$L = -\partial_x^2 + u(x) = Q^+Q + const, Q = \partial_x + a(x)$$

$$a_x + a^2 = u + C.$$

Дискретизация:

$$L = c_{n-1}T^{-1} + c_nT + u_n = (Q')^+Q' + C' = Q^+Q + C$$

где $Q = aT + b$, $Q' = aT^{-1} + b$ и $T(n) = n + 1$.

Преобразование Дарбу (правые и левые) имеют вид

$$\psi \to Q\psi = \psi', L \to L' = QQ^+$$

или

$$\psi \to Q'\psi = \psi'',\ L \to L'' = Q'(Q')^+$$

для всех решений $L\psi = \lambda\psi$.

$n = 2$ (Слабая факторизуемость, по модулю диагональных членов):

А. Гиперболический случай

$$L\psi = 0, L = Q_1Q_2 + W(x) = Q_2Q_1 + V(x)$$

$$Q_i = \partial_i + A_i.$$

Дискретизация (см. Рис 5):

Квадратная решетка T_1, T_2,

$$L = a + bT_1 + cT_2 + dT_1T_2$$

с калибровочной группой уравнения $L\psi = 0$

$$L \to fLg^{-1}, \psi \to g\psi$$

Имеется 2 инварианта этих преобразований, похожих на аналоги кривизны. Преобразование Лапласа (ниже) можно выразить через эти инварианты.

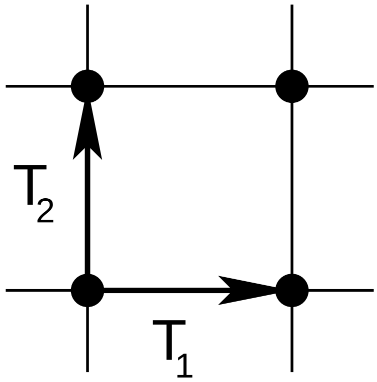

Рис. 5:

Факторизация имеет вид правой или левой:

$$L = f[(1 + uT_1)(1 + vT_2) + w$$

или

$$L = f'[(1 + v'T_2)(1 + u'T_1) + w']$$

Б. Эллиптический случай

$$L = Q^+Q + W = QQ^+ + V$$

$$Q = (\partial + A(z, \bar{z}))$$

$\partial = \partial_x - i\partial_y, z = x + iy, i^2 = -1.$

Дискретизация: Правильная треугольная решетка $T_1, T_2, T_1^{-1}T_2$

$$L = a + bT_1 + cT_2 + dT_1^{-1}T_2 + T_1^{-1}b + T_2^{-1}c + T_2^{-1}T_1 d$$

где все коэффициэнты вещественны. Мы имеем чернобелую раскраску и факторизации (см. Рис 6)

$$L = Q^+Q + F = P^+P + G, \quad Q = u + vT_1 + wT_2, \;\; P = u' + v'T_1^{-1} + w'T_2^{-1}$$

Преобразования Лапласа (правые и левые) имеют вид

$$\psi \to Q_i \psi$$

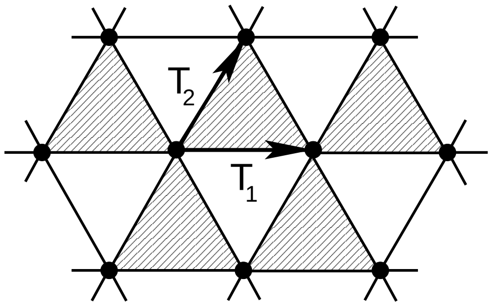

Рис. 6:

в непрерывном гиперболическом случае, и аналогично в дискретном, исходя из факторизации.

Они имеют вид

a. Правое:

$$\psi \to Q\psi$$

b. Левое:

$$\psi \to P\psi$$

в эллиптическом случае.

Определение. Мы назовем связностью, порожденной оператором L указанного вида, прямую сумму операторов $Q \bigoplus P$. Эта связность имеет ранг 1, по определению.

Мы докажем ниже , что это–SL_2-связность. Эта конструкция обобщается на все триангулированные поверхности, особенно–с дискретной конформной структурой, то-есть, чёрно-белой раскраской (см Рис 4, Рис 6). В этом случае имеется 3 семейства n-симплексов:

1. Все симплексы Q. Это связность.

2. Черные симплексы Q^b. Этот оператор (в случае канонической связности) берется за дискретизацию $\bar{\partial}$ при построении дискретного комплексного анализа.

3.Белые симплексы Q^w. Этот оператор берется за дискретизацию ∂.

Соответственно, возникают операторы, играющие роль ковариантных производных в нашей теории

$$Q^b, Q^w, Q = Q^b \bigoplus Q^w$$

3 Проблема Редукции.

Задача: Как эффективно построить все дискретные $SL_2^{\pm}$ связности на триангулированном многообразии M^2?

Конструкция: Используем следующую процедуру. Поставим в соответствие каждому ребру $R \in M$ положительное число $A(R) > 0$. Каждый треугольник $T \in M$ имеет ровно 3 вершины P_1, P_2, P_3 и 3 ребра R_1^T, R_2^T, R_3^T. Пусть $R_i = P_i P_{i+1}$, где индекс i берется по модулю 3. Рассмотрим следующий оператор связности Q:

$$Q\psi_T = \sum_i u_{T:P_i} \psi_{P_i}$$

где $u_{T:P_i}$ заданы как решения системы уравнений (см Рис 7)

$$u_{T:P_i} u_{T:P_{i+1}} = A(P_i P_{i+1}).$$

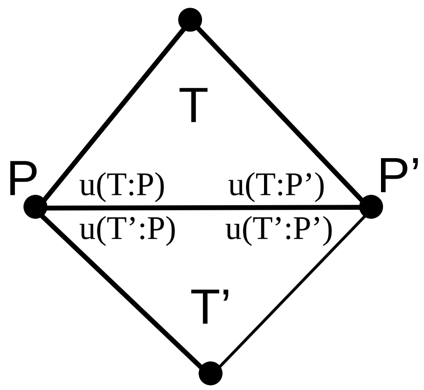

Рис. 7:

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *1. Дискретные связности, порождаемые указанным оператором Q принадлежат классу $SL_2^{\pm}$ как локально, так и глобально.*

2.Все $SL_2^{\pm}$ связности получаются в рамках данной конструкции.

Доказательство первой части.

Рассмотрим толстый путь $\gamma = T_1 ... T_m = T_0$, где $F_i = T_i \bigcap T_{i+1}$. Определитель матрицы перехода от пространства связанного с ребром F_{i-1} к пространству, связанному с ребром F_i равен

$$\det M_i = -u_{T_i:P'}/u_{T_i:P''} = -(u_{T_i:P} u_{T_i:P'})/(u_{T_i:P} u_{T_i:P''}) = -A(F_{i-1})/A(F_i),$$

где $P' \in F_{i-1}$, $P' \notin F_i$, $P'' \notin F_{i-1}$, $P'' \in F_i$, $P = F_{i-1} \bigcap F_i$. Для замкнутого толстого пути каждый из сомножителей появляется один раз в числителе и один раз в знаменателе, что и означает унимодулярность матрицы монодромии.

Доказательство второй части.

Каждое из рёбер F нашей триангуляции принадлежит ровно двум треугольникам $F = T' \bigcap T''$. Убедимся, что можно выбрать нормировку связности, т.е. калибровочное преобразование $Q \to fQ$, где f – некоторая положительная функция на треугольниках, так, чтобы для всех ребер $F = (P, P')$ имело место соотношение

$$A(T' : PP') = A(T'' : PP'),$$

где $A(T' : PP') = u_{T':P} \cdot u_{T':P'}$, $A(T'' : PP') = u_{T'':P} \cdot u_{T'':P'}$.

Зафиксируем один из треугольников T_0. Положим $f(T_0) = 1$. Рассмотрим произвольный толстый путь, начинающийся в T_0 и завершающийся в T. Условие $A(T' : PP') = A(T'' : PP')$ однозначно фиксирует нормировку на всех треугольниках этого пути. Рассмотрим замкнутый толстый путь, начинающийся и заканчивающийся в T_0. Унимодулярность матрицы монодромии в точности означает, что при обходе по такому пути мы снова приходим к $f(T_0) = 1$, а, следовательно, данная процедура самосогласована.

Замечание. *Произвольную связность, локально принадлежащую классу $SL_2^{\pm}$, можно рассматривать как $SL_2^{\pm}$ связность на универсальном накрывающем пространстве $SL_2^{\pm}$, причём оператор Q определяется набором чисел $A(E)$ на ребрах и его коэффициенты $u_{T:P}$ таковы, что для $g \in \pi_1(M)$ имеет место*

$$u_{gT:gP} = \lambda_g u_{T:P},$$

или, что эквивалентно, $g^* Q = \lambda_g Q$ для некоторого представления $\pi_1(M) \to \mathbb{R}^+$.

4 SL_2 связности и разностные самосопряженные операторы.

Рассмотрим произвольное триангулированное 2-мерное многообразие M^2, снабжённое "дискретной конформной структурой", т.е. чёрно-белой раскраской 2-симплексов этой трмангуляции (треугольников), использованной в работах [7, 10, 12, 13]. Рассмотрим скалярный вещественный самосопряженный оператор на таком многообразии может

$$L\psi_P = \sum_{P'} b_{P:P'}\psi_{P'} = \sum_{P\neq P'} b_{P:P'}\psi_{P'} + W(P)\psi_P,$$

где либо $P = P'$, либо точки P и P' соединены ребром. Самосопряженность означает, что для всех пар P, P' имеет место $b_{P:P'} = b_{P':P}$. Коэффициенты $b_{P:P}$ мы будем называть потенциалом: $W(P) = b_{P:P}$, мы также будем предполагать, что $b_{P:P'} > 0$ для всех PP'.

Как было указано в работах [1, 2, 4], каждый такой оператор может быть представлен в факторизованном виде: существует единственная пара операторов Q^b и Q^w, действующих на чёрных и белых треугольниках соответственно, такая, что

$$L = Q^{b+}Q^b + W^b = Q^{w+}Q^w + W^w.$$

Здесь $Q^b\psi_T = \sum_{P\in T} u_{T:P}\psi_P$, где T – произвольный чёрный треугольник и $Q^w_T = \sum_{P\in T} u_{T:P}\psi_P$ где T – произвольный белый треугольник (см. Рис 4, Рис 6).

Рассмотрим составной оператор $Q_L = \{Q^b, Q^w\}$, совпадающий с Q^b на чёрных треугольниках и с Q^w на белых. Он порождает некоторую дискретную GL_2 связность на многообразии M^2, ассоциированную с вещественным оператором L.

Теорема 2. *Связность Q_L является SL_2 связностью.*

Доказательство. Любое ребро триангуляции является пересечением чёрного и белого треугольника $R = T\bigcap T'$. Поскольку имеет место равенство $L = Q^{b+}Q^b = Q^{w+}Q^w$ с точность до диагональных членов, то все внедиагональные коэффициенты оператора L представлены как произведения пар коэффициентов операторов Q^b или Q^w соответственно (см Рис 7)

$$u_{T:P}u_{T:P'} = u_{T':P}u_{T':P'} = A(PP').$$

Как было доказано выше, задание набора чисел $A(R)$ на ребрах $R = PP'$ определяет $SL_2^{\pm}$ связность. Поскольку каждый толстый путь на многообразии с дискретной конформной структурой содержит чётное число симплексов, то мы имеем SL_2 связность.

Теорема доказана.

5 Преобразования Лапласа-Дарбу, Конечнозонные Операторы и Двумерная Цепочка Тоды.

Преобразования Дарбу для одномерной задачи $L\psi = \lambda\psi$:

$$L = Q^+Q + C \to QQ^+ + C = \tilde{L}, \psi \to \tilde{\psi} = Q\psi$$

и **Преобразования Лапласа** для двумерного уравнения

$$L\psi = 0$$

–см выше- имеют глубокую связь с вполне интегрируемыми системами типа КдФ, КП итд.

В непрерывном случае $L = -\partial_x^2 + u$ циклические цепочки преобразований Дарбу нечетной длины приводят к конечнозонным операторам и их интересным обобщениям (см Вейсс, Веселов, Шабат, [14, 15, 16]). Разностный аналог этого не завершен (см [17]).

В двумерном непрерывном гиперболическом случае

$$L\psi = 0, L = \partial_x\partial_y + a\partial_x + b\partial_y + c$$

имеется связь преобразований Лапласа с трехмерной геометрией. Их цепочки (включая циклические) исследовались школой Дарбу в 19 веке. Удобно выражать преобразование Лапласа через калибровочные инварианты.

Двумерный непрерывный эллиптический случай исследовался Новиковым и Веселовым в [4]. Здесь оператор

$$L = -\Delta + A\partial + B\bar{\partial} + c = L^+ = Q^+Q + V$$

$$Q^+ = -\partial + A, \quad Q = \bar{\partial} + \bar{A}$$

(заряд полагается равным 1), самосопряжен и периодичен. Требуется гладкость и периодичность инвариантов– магнитного поля $2H = (\bar{\partial} A - \partial B), B = \bar{A}$ и потенциала $V = e^f$:

$$H' = H + 1/2\Delta f, \quad e^{f'} = e^f + H'$$

Оператор называется топологически тривиальным, если интеграл по элементарной ячейке решетки равен нулю $\bar{H} = 0$, или коэффициэнты оператора A, B, V периодичны. Рассмотрим цепочку преобразований Лапласа

$$... \to L_{-n} \to L_{-n+1} \to ...L_{-1} \to L_0 \to L_1 \to ...$$

Выразив магнитные поля через потенциалы $H' = e^{f'} - e^f$ для всех n, мы получим

$$1/2\Delta f_n = H_{n+1} - H_n = (e^{f_{n+1}} - e^{f_n}) - (e^{f_n} - e^{f_{n-1}})$$

После подстановки $f_n = g_n - g_{n-1}$ мы получаем двумерную цепочку Тода

$$1/2\Delta g_n = e^{g_{n+1} - g_n} - e^{g_n - g_{n-1}}$$

в эллиптическом случае. Вывод цепочки Тода в гиперболическом случае такой же.

Отличие состоит в глобальных свойствах. Согласно теореме Новикова-Веселова [4], циклическая цепочка Лапласа гладких периодических операторов $L_0, L_1, ..., L_n = L_0$ в эллиптическом случае состоит из алгеброгеометрих операторов (на нулевом уровне). Все они топологически тривиальны. Подобного результата нет в гиперболическом случае, это результат глобального анализа, основанного на конечномерности многообразий решений эллиптических нелинейных уравнений на компактном многообразии (здесь–торе).

Были исследованы также цепочки

$$L_0 \to L_1 ... \to L_n$$

такие что операторы $L_0 = Q_0^+ Q_0 + C, \quad L_n = Q_n^+ Q_n$ оба факторизуемы сильно. Такие операторы обладают замечательным свойством спектра: они всегда топологически нетривиальны и имеют 2 бесконечнократно вырожденных уровня, один из которых основной. Для длины цепочки $n = 1$ такой оператор один, это оператор Ландау в однородном магнитном поле и нулевом электрическом. Для длины $n = 2$ такие операторы образуют конечномерные семейства– любые двояко-периодические гладкие решения уравнения

$$1/2\Delta f = e^f + C$$

где C–это n-кратный топологический заряд, не равный нулю. (см [4]). Согласно нашей гипотезе, этот феномен существует только для малых длин цепочки ($n = 2, 3, ?$).

Перейдем теперь к дискретным системам. Несложно доказывается такое утверждение:

Предложение. Пусть M^2 триангулированная поверхность. Любой самопряженный вещественный разностный оператор второго порядка

$$L\psi_P = \sum_{P'} b_{PP'}\psi_{P'}$$

где все $b_{P'P} = b_{PP'} \neq 0$ для $P \neq P'$, представляется в виде

$$L = Q^+Q + W$$

Здесь Q–оператор $SL_2^{\pm}$–связности и W–потенциал. Если триангуляция окрашена чёрно-белым, то оператор однозначно представляется в виде

$$L = (Q^b)^+Q^b + U = (Q^w)^+Q^w + V = 1/2Q^+Q + W$$

где $Q = Q^b \bigoplus Q^w$.

Доказательство легко следует из данного выше описания $SL_2^{\pm}$ -связностей в данной работе. Коэфициент $b_{PP'}$ однозначно факторизуется как произведение коэфициэнтов оператора связности Q вдоль любого прилегающего к ребру PP' треугольника (см Рис 7). Это однозначно определяет связность Q.

Можно ли определить преобразование Лапласа? В статье Новикова и Дынникова [2] 1997 года определены все возможные преобразования Лапласа для крашеных триангуляций. Мы встретим в Добавлении об электрических цепях интересную физическую реализацию этого в специальной калибровке, где $L(const) = 0$.

Ситуация такова:

Пусть $L\psi = 0$. Мы определяем преобразование, как и в работе [2],

$$L = Q^+Q + W \to QW^{-1}Q^+ + 1 = \tilde{L}$$

$$\psi \to \tilde{\psi} = Q\psi$$

Вместо оператора Q могут быть Q^b или Q^w. Это преобразование Лапласа корректно определено и калибровочно инвариантно относительно преобразований $L \to U^{1/2}LU^{1/2}$. Квадрат такого преобразования Лапласа единичен, однако.

Для $D = 2$ нам удалось найти только следующие классы, для которых преобразование Лапласа всегда корректно определено и может быть нетривиально проитерировано бесконечное число раз, образуя цепочку.

I. Квадратная решётка. Рассматривается квадратная решётки с базисными сдвигами T_1, T_2. Операторы L действуют на пространстве функций её вершин и являются гиперболическими (см. [1, 2]):

$$L = a(m,n) + b(m+1,n)T_1 + c(m,n+1)T_2 + d(m+1,n+1)T_1T_2.$$

На нулевом уровне гиперболической задачи $L\psi = 0$ действует калибровочная группа

$$L \to fLg, \psi \to g^{-1}\psi,$$

причём предполагается, что обе функции f, g нигде не обращаются в 0. Мы имеем две факторизации ("левую" и "правую"):

$$L = f[(1 + uT_1)(1 + vT_2) + w] = g[(1 + vT_2)(1 + uT_1) + w_L].$$

Преобразование Лапласа задаётся стандартным способом

$$\tilde{L} = f'[(1 + vT_2)w^{-1}(1 + uT_1) + 1].$$

Для того, чтобы применить преобразование Лапласа, мы используем следующий выбор представителя L в классе калибровочно эквивалентных на нулевом уровне энергии операторов: $L = (1 + uT_1)(1 + vT_2) + w$. Здесь $u = u(m+1,n), v = v(m,n+1), w = w(m,n)$. Коэффициенты оператора $\tilde{L}$, получающихся после применения преобразования Лапласа, мы обозначим u', v', w' соответственно. Они берутся в тех же точках.

Отметим, что для сохранения калибровки после преобразования Лапласа нужно правильно подобрать функцию f': $f' = (1 + w')w/(1 + w)$. Мы получаем

$$\tilde{L} = f'[(1 + vT_2)w^{-1}(1 + uT_1) + 1] = (1 + u'T_1)(1 + v'T_2) + w'].$$

Здесь мы используем следующие обозначения для функций со сдвигом аргумента: $u_i = T_i^*(u), v'_i = T_i^*(v'), \ldots$.

Прямая подстановка даёт

$$u' = f'u/w, v' = f'v/w_2, u'v'_1 = f'vu_2/w_2.$$

У нас ещё остаётся калибровочные преобразования, сохраняющие используемую форму оператора: $L \to f^{-1}Lf, \psi \to f\psi$. Инвариантными относительно данных преобразований являются потенциал w факторизованной формы и **кривизна** $H = vu_2u^{-1}v_1^{-1}$, аналгичная магнитному полю в непрерывном случае. В результате применения преобразования Лапласа мы получаем

$$H' = (1 + w'_2)/(1 + w_2), 1 + w' = (1 + w)w_{m-1,n}w_{m,n+1}w^{-1}w^{-1}_{m-1,n+1}H_{m-1,n},$$

или, после сдвига на T_1:

$$1 + w'_1 = (1 + w_1)ww_1^{-1}w_{1,2}^{-1}H.$$

Тем самым, действуя по схеме работы [2], мы можем выразить инварианты H', w' через инварианты H, w, действуя по аналогии с непрерывным случаем. Далее исключим из уравнений H, H', выражая, тем самым,всю цепочку исключительно через переменную w (см. [4]).

В результате, действуя согласно классической схеме Дарбу и его школы XIX и используя цепочки преобразований Лапласа (см. цитирования в работе [4]), мы получаем дискретизацию 2-мерной цепочки Тоды. Цепочка преобразований Лапласа

$$... \to L_{k-1} \to L_k \to L_{k+1} \to ...$$

описывается уравнением

$$\frac{w''_1 + 1}{w'_1 + 1} \times \frac{w_2 + 1}{w'_2 + 1} = \frac{w'w'_{1,2}}{w'_1w'_2},$$

где f' обозначает результат однократного применения преобразования Лапласа к функции f, f'' – результат двукратного применения преобразования Лапласа. В частности, w, w', w'' отвечают дискретным временам $k-1, k, k+1$ нашей решётки: $w^k(m,n) = w', w^{k-1}(m,n) = w, w^{k+1}(m,n) = w''$ в точке (m,n), w_i означает сдвиг функции в направлении $T_i, i = 1, 2$, т.е. $w_{m+1,n}$ и $w_{m,n+1}$ соответственно. Тем самым, уравнение на $w^k(m,n)$ имеет следующий вид

$$\frac{w_1^{k+1} + 1}{w_1^k + 1} \times \frac{w_2^{k-1} + 1}{w_2^k + 1} = \frac{w^kw^k_{12}}{w^k_1w^k_2}.$$

Подобное исследование проводил также Долива ([18]).

Пример. Действуя в соответствии с [2], рассмотрим задачу о циклической цепочке длины 2, которая в непрерывном случае приводит к уравнению Синус-Гордон (sinh-Городон). Положим $a = w^{2k}, b = w^{2k+1}$ для всех k. Мы получаем пару уравнений на функции $a(m,n)$ and $b(m,n)$. Вводя новую функцию $G = ab$, мы получаем

$$\frac{GG_{12}}{G_1G_2} = 1.$$

Рассмотрим решения специального вида, отвечающие $G = C$, где C– некоторая константа. В результате получается система

$$\frac{C+b_1}{1+b_1} \times \frac{C+b_2}{1+b_2} = bb_{12}.$$

Как было отмечено ранее в работе [2]1997 года, её можно рассматривать как дискретный аналог системы sinh-Городон. При $C = 1$ система вырождается в тривиальную: $bb_{12} = 1$.

Эквивалетность этого дискретного аналога 2-мерной цепочки Тоды известной 3-х мерной полностью дискретной системе Хироты была установлена через несколько лет Долива (см [19]).

Семейство систем Хироты можно записать в следующем виде:

$$\gamma F(k+1,m+1,n)F(k-1,m,n+1) + \alpha F(k,m,n)F(k,m+1,n+1)+$$

$$+\beta F(k,m+1,n)F(k,m,n+1) = 0,$$

причём предполагается, что $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

II. Тривалентное дерево. Рассматривается самосопряженный оператор 4 порядка L, действующий на функциях вершин тривалентного дерева – см. [6]. Он имеет следующий вид:

$$L\psi_P = \sum_{P''} a_{PP''}\psi_{P''} + \sum_{P'} b_{PP'}\psi_{P'} + W_P\psi_P,$$

где $PP'P''$ короткий путь длины 2, $|PP'| = 1$ и $|P'P''| = 1$ – см. Рис 8

Оператор L допускает факторизацию в виде $L = Q^+Q + u_P$, где

$$Q\psi_P = \sum_{P'} d_{PP'}\psi_{P'} + v_P\psi_P,$$

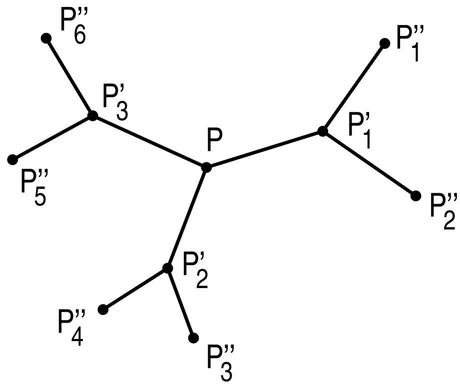

Рис. 8:

$$a_{PP''} = d_{P'P}d_{P'P''}, b_{PP'} = d_{P'P}v_{P'} + d_{PP'}v_P,$$
$$W_P = v_P^2 + \sum_{P'} d^2_{P'P} + u_P.$$

Преобразование Лапласа задаётся стандартными формулами

$$\tilde{L} = Qu^{-1}Q^+ + 1, \tilde{\psi} = Q\psi,$$

при этом мы работаем в классе эквивалентности самосопряжённых операторов $L \to fLf, \psi \to f^{-1}\psi$. Итерируя преобразования Лапласа, получаем цепочки Лапласа

$$... \to L_n \to L_{n+1} \to ...$$

где $\tilde{L}_n = L_{n+1}$.

В данной ситуации выбор факторизации зависит от непрерывного параметра, поскольку уравнение

$$b_{PP'} = d_{P'P}v_P + d_{PP'}v_{P'}$$

имеет однопараметрическое семейство решений v, зависящих от начального значения v_{P_0} в заданной точке $P_0 \in \Gamma$. Мы можем применять серию преобразований Лапласа, каждый раз выбирая другое значение параметра. Тем самым легко получить длинные нетривиальные цепочки Лапласа. Они аналогичны цепочкам Дарбу, которые для одномерного непрерывного 1-мерного оператора Шредингера изучались Дж. Вейссом, А.

Шабатом и А. Веселовым в [14, 15, 16], при этом факторизация также зависела от параметра, задающего решения уравнения Риккати. Мы планируем в дальнейшем изучить соответствующие аналоги дискретных цепочек Тоды, используя последовательности цепочек Лапласа-Дарбу. Похоже, что эти системы будут существенно проще обсуждавшихся выше.

III. Правильная треугольная решётка. Рассматривается вещественный самосопряженный оператор L, действующий на функциях вершин правильной треугольной решётки с базисными сдвигами $T_1^{\pm 1}, T_2^{\pm 1}, (T_1^{-1}T_2)^{\pm 1}$ равной длины

$$L = a(m,n) + \{b(m+1,n)T_1 + c(m,n+1)T_2 +$$
$$+d(m-1,n+1)T_1^{-1}T_2 + (adjoint)\},$$

где $T_i^+ = T_i^{-1}$ Мы имеем правую и левую факторизации:

$$L = Q^+Q + W, Q = (u + vT_1 + wT_2)$$

и

$$L = Q'^+Q' + W', Q' = u' + v'T_1^{-1} + w'T_2^{-1}$$

Данной решётке естественно отвечает триангуляция плоскости $\mathbb{R}^2$ с чёрно-белой раскраской, причем $Q = Q^b$ и $Q' = Q^w$–см Рис 5

Коэффициенты b, c, d заданы на ребрах $R = PP', PP'', P'P''$, где $P = (m,n), P' = (m+1,n), P'' = (m-1,n+1)$.

Указанная решётка – специальный случай триангулированного 2-мерного многообразия с чёрно-белой раскраской треугольников – см. главу 1. При этом имеется естественный изоморфизм как множества чёрных треугольников так и множества белых треугольников с множеством вершин (m,n). Используя его, мы записываем Q^+, Q и Q'^+, Q' как операторы, отображающие пространства функций вершин решётки в себя. В данном случае преобразование Лапласа можно применять бесконечное число раз. Бесконечные цепочки преобразований Лапласа необходимы для построения дискретизаций 2-мерной системы Тоды.

В нашем случае отсутствует калибровочная свобода, поскольку преобразования $L \to f^{-1}Lf, \psi \to f^{-1}\psi$ самосопряжённость оператора, а преобразования $L \to fLf$ разрушают потенциалы W, W', где $L = Q^+Q + W = Q'^+Q' + W'$. Для построения дискретизации 2-мерной цепочки Тоды нужно рассматривать преобразования Лапласа, связанные со всеми факторизациями $L = Q_j^+Q_j + W_j$, отвечающими базисным сдвигам

$T_{j,1}, T_{j,2}, j = 0,1,2,3,4,5$, где $T_{0,1}, T_{0,2} = T_1, T_2$ и остальные получаются из них поворотами на угол $2j\pi/6$. Базисные сдвиги с номерами j и $j+3(mod 6)$ обратны друг к другу.

$$L = Q_j^+ Q_j + const \to \tilde{L}_j = Q_j Q_j^+ + const = \tilde{\psi}_j$$
$$\psi \to Q_j \psi = \tilde{\psi}_j$$

Для построения дискретизации 2-мерной цепочки Тоды можно пользоваться другой калибровкой на нулевом уровне энергии $L\psi = 0$

$$L \to fLf, \psi \to f^{-1}\psi$$

фиксируемой условием $W = const$ где $const = 0$ или $const = 1$.

Преобразования Лапласа в этой калибровке приобретают вид

$$L = Q_j^+ Q_j + const \to \tilde{L}_j = Q_j Q_j^+ + const,$$
$$\psi \to Q_j \psi = \tilde{\psi}_j.$$

На каждом шаге мы осуществляет новую факторизацию и, после этого, калибровочным преобразованием заново приводим потенциал к константе. Полный набор преобразований Лапласа в этом случае может быть наилучшим образом организован с учетом соотношений между ними. В любом случае, мы придем к некоторой дискретной системе типа цепочки Тоды на 3-х мерной решетке в $\mathbb{R}^3$. Не производя вычислений, заметим, что Похожая система известна с начала 1980х (см. [22]). Мы называет её "четырехчленной системой Хироты-Мивы". Представляется правдоподобным, что кроме нее мы здесь ничего не получим. Тем самым, вполне интегрируемые системы типа дискретной двумерной цепочки Тоды уже возникали в работах начала 1980х в период интенсивного поиска новых вполне интегрируемых систем рядом научных групп.

Заметим следующее:

Теорема 3. *Чёрные и белые операторы* $Q^b = Q_j = u_j + v_j T_{j1} + w T_{j2}$ *и* $Q^w = P_j = u'_j + v'_j T_{j1}^{-1} + w'_j T_{j2}^{-1}$, *построенные выше, задают* SL_2 *дискретную связность* $\{Q^w, Q^b\}$, *не зависящую от* j.

Доказательство. Легко убедиться, что эта связность в точности совпадает со связностью, полученной из факторизации вещественных самосопряженных операторов в главе 1, выписанную в терминах 3 различных пар операторов сдвига.

Согласно теореме, доказанной в главе 2, эта связность всегда класса SL_2, поскольку соотношения для произведений коэффициентов чёрных и белых операторов немедленно следуют из того факта, что мы имеем две различных факторизации одного и того же оператора, как это было указано выше. Это завершает доказательство теоремы.

Выводы: Каноническая SL_2 связность, построенная по вещественному самосопряженному оператору на правильной треугольной решётке, аналогична магнитному члену оператора Шредингера в квантовой механике.

6 Приложение 1: Дискретные SL_n связности.

Введём следующие обозначения. Рассмотрим $n-1$-мерную грань F n-мерного симплекса T с вершинами P_0, P_1, $\dots$, P_n, $P_n \notin F$. Обозначим $A(T:F)$ произведение всех коэффициентов связности в вершинах F

$$A(T:F) = \prod_{0 \le i < n} u_{T:P_i}.$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *Дискретная связность Q принадлежат классу $SL_n^{\pm}$ тогда и только тогда, когда калибровочным преобразованием $Q \to fQ$, где f – некоторая положительная функция на n-симплексах её можно отнормировать так, что для любой пары n-симплексов T', T'', пересекающихся по грани максимальной размерности $F = T' \bigcap T''$, $\dim F = n-1$, имеет место равенство*

$$A(T':F) = A(T'', F) = A(F). \tag{1}$$

Доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Предположим, что соотношение (1) имеет место для всех гиперграней. Рассмотрим толстый путь $\gamma = T_1 \dots T_m = T_0$, где $F_i = T_i \bigcap T_{i+1}$. Определитель матрицы перехода от пространства, связанного с гранью F_{i-1} к пространству, связанному с гранью F_i равен

$$\det M_i = -u_{T_i:P'}/u_{T_i:P''} = -\prod_{P \in F_{i-1}} u_{T_i:P} \Bigg/ \prod_{P \in F_i} u_{T_i:P} = -A(F_{i-1})/A(F_i),$$

где $P' \in F_{i-1}$, $P' \notin F_i$, $P'' \notin F_{i-1}$, $P'' \in F_i$. Для замкнутого толстого пути каждый из сомножителей $A(F_i)$ появляется один раз в числителе и один раз в знаменателе, что и означает унимодулярность матрицы монодромии.

Пусть теперь матрица монодромии унимодулярна вдоль любого толстого пути. Зафиксируем один из n-симплексов T_0. Положим $f(T_0) = 1$. Рассмотрим произвольный толстый путь, начинающийся в T_0 и завершающийся в T. Условие $A(T' : F) = A(T'' : F)$ однозначно фиксирует нормировку на всех n-симплексах этого пути. Рассмотрим замкнутый толстый путь, начинающийся и заканчивающийся в T_0. Унимодулярность матрицы монодромии в точности означает, что при обходе по такому пути мы снова приходим к $f(T_0) = 1$, а, следовательно, данная процедура самосогласована, что и завершает доказательство.

Следствие. Полная классификация $SL_n^{\pm}$ связностей такова: Связность задается произвольной положительной вещественнозначной функцией на $n-1$–мерных гранях $A(\Delta) \in \mathbb{R}^+$ с калибровочной эквивалентностью

$$A(\Delta) \to \prod_{P_i \in \Delta} f(P_i) A(\Delta)$$

для любой функции от вершин.

Пример. Для простейших триангуляций n-сфер как граней симплексов $S^n = \partial \Delta^{n+1}$ мы имеем $s_k = (n+2)!/(k+1)!(n-k+1)!$ симплексов размерности k. Размерность пространства калибровочных классов $SL_n^{\pm}$ связностей равно

$$s_{n-1} - s_0 = (n+1)(n+2)/2 - (n+2) = (n+2)(n-1)/2.$$

Это число равно $2, 5, 9, 14, ...$ для $n = 2, 3, 4, 5, ...$ и далее растет квадратично по n.

Ранее мы уже работали с каноническими связностями при построении дискретизации комплексного анализа для $n = 2$ (см. [7, 13]). Для всех $n \geq 2$ известно, что её кривизна в каждой точке равна нулю (т.е. тривиальна) тогда и только тогда, когда симплектическая звезда $St(\sigma^{n-2})$ любого $n-2$-мерного симплекса содержит чётное число вершин. Мы можем раскрасить n-симплексы в чёрный и белый цвета тогда и только тогда, когда любой замкнутый толстый путь содержит четное число n-симплексов. Группа голономии G – всегда подгруппа группы перестановок $G \subset S_{n+1}$.

Для построения дискретного аналога комплексного анализа необходимо, чтобы каноническая связность была глобально плоской. В этом случае мы имеем чёрно-белую раскраску n-симплексов и n-мерное семейство ковариантных констант $Q\psi = 0, \psi \in \mathbb{R}^n$. В этом случае черный и белый операторы Q^b, Q^w корректно определены, и оператор связности – прямая сумма $Q = Q^b \bigoplus Q^w$. Ковариантная константа фиксируется заданием набора $n+1$ вещественного числа ψ_j на любом из n-симплексов с условием $\sum_j \psi_j = 0$. Для $n > 2$ аналог этой теории пока не построен.

7 Приложение 2: Электрические цепи и преобразования Лапласа.

Рассмотрим некоторый граф Γ (т.е. одномерный симплициальный комплекс). Пусть Γ является 1-мерным остовом 2-мерного комплекса K такого, что:

1. Каждое ребро графа Γ входит в границу ровно одного 2-мерного треугольника.

2. Каждая вершина принадлежит по меньшей мере трём треугольникам.

Рассматривая наш граф как электрическую цепь мы предполагаем, что его каждому ребру I приписано положительное число – **проводимость** $c(I) > 0$. **Сопротивление** ребра – величина, обратная к проводимости $r(I) = 1/c(I)$. Если в каждой вершине графа задано напряжение $U(P)$, то через каждое ориентированное ребро графа $\hat{I} = [P_0, P_1]$ протекает ток

$$J([P_0, P_1]) = c(I) \cdot (U(P_1) - U(P_0)) = (C\partial^* U)([P_0 P_1]), U = U(P).$$

Ток J естественно рассматривать как одномерную цепь на графе. Назовем вершину графа **свободной,** если она не входит в границу ∂J этой цепи (точнее входит с коэффициентом 0). Для напряжения на свободной вершине имеет место соотношение:

$$U(P) = \frac{\sum\limits_i U(P_i) c([P, P_i])}{\sum\limits_i c([P, P_i])},$$

где P_i все соседи точки P. Если все точки графа свободны, то напряжение $U(P)$ удовлетворяет линейному разностному уравнению второго порядка $LU = 0$. В общей ситуации образ $LU(P)$ – **сумма токов**, протекающих через данную точку.

Преобразование звезда-треугольник[2] для одного треугольника P_1, P_2, P_3 с проводимостями c_3 для $[P_2, P_1]$, c_1 для $[P_3, P_2]$, c_2 для $[P_1, P_3]$ соответственно выглядит следующим образом (см. Рис 9):

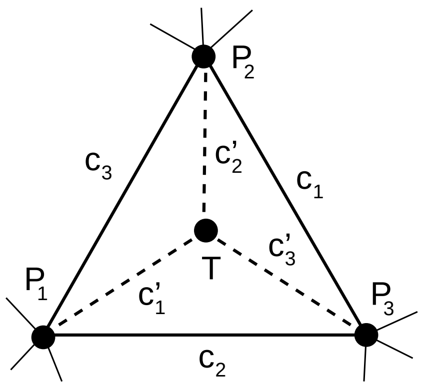

Рис. 9:

мы добавляем новую вершину T в центр треугольника T (будем считать его "чёрным треугольником") и соединим её с вершинами P_1, P_2, P_3 новыми ребрами с проводимостями c_1' для $[P_1, T]$, c_2' для $[P_2, T]$, c_3' для $[P_3, T]$, где:

$$c_1'(T) = \frac{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{c_1},\ c_2'(T) = \frac{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{c_2},\ c_3'(T) = \frac{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{c_3}.$$

Уберем из полученного графа все три ребра $[P_1, P_2]$, $[P_2, P_3]$, $[P_3, P_1]$ нашего треугольника. Зададим напряжение на новом графе условиями:

1. На всех вершинах, кроме новой вершины T напряжение то же, что и раньше $U' = U$.

2. Сумма токов в вершине T равна 0.

Эти условия однозначно определяют напряжение на новой вершине P и имеет место равенство $\partial J' = \partial J$.

[2]По-видимому, это преобразование было впервые введено Кеннелли в 1899 году для классических электрических цепей.

Применяя **Преобразование звезда-треугольник** ко всем 2-мерным (чёрным) симплексам T комплекса K по очереди, мы задаем преобразование на всем комплексе K. Оно порождает отображение пространства функций напряжений на старых вершинах $U(P)$ в пространство функций напряжений $U'(T)$ на новых вершинах. Поскольку имеет место взаимно-однозначное соответствие между чёрными треугольниками и новыми вершинами, это отображение можно интерпретировать как отображение из пространства функций на вершинах в пространство функций на чёрных треугольниках.

Напряжения $U(P)$ на исходном графе Γ с вершинами P_i в предположении, что все они свободны, удовлетворяет уравнению:

$$LU = 0, L = \partial C \partial^*, C : I \to c_I I$$

где I – ребра графа. Рассмотрим **оператор чёрных треугольников** $Q^b\psi(T) = \sum c_i' \psi(P_i), i = 1, 2, 3,$ отображающий функции вершин в функции чёрных треугольников, введённый в работах авторов и И.А.Дынникова начиная с 1997 года.

Теорема 5. *.Оператор $L = \partial C \partial^*$ может быть факторизован в чёрнотреугольной форме (Новикова-Дынникова)*

$$L = Q^+(C')^{-1}Q - W, \quad C' : T \to (\sum_{i=1}^{i=3} c_i'(T))T,$$

для всех чёрных треугольников T.

Доказательство легко получается прямой подстановкой. В работах Новикова и Дынникова (см. [2, 3]) использовалась факторизация $L = P^+P - V$, где $P = \left(\sqrt{(C')}\right)^{-1} Q$, и P чёрнотреугольный оператор, $\psi' = P\psi$. В нашем случае $\psi' = (C')^{-1}Q\psi$. Здесь мы работаем в калибровке $L\psi = 0$ для $\psi = const$. Используя калибровочную группу $L \to f(P)Lf(P), \psi(P) \to f^{-1}(P)\psi(P)$ мы всегда можем записать преобразование в удобном нам специальном виде.

Теорема 6. *Оператор L', действующий на функциях чёрных треугольников, получается из L преобразованием звезда-треугольник из теории электрических цепей. Он имеет вид*

$$L' = QW^{-1}Q^+ - C'$$

и из соотношения $LU = 0$ следует $L'U' = 0, U' = C'QU$. Тем самым, оператор L', получается из оператора L преобразованием Новикова-Дынникова (НД) типа Лапласа (записанного в специальной калибровке) для любого введённого выше комплекса K состоящего из чёрных треугольников.

Данной приложение появилось после того, как информация о преобразованиях звезда-треугольник была сообщена авторам Корепановым. Корепанов и Кашаев использовали его для построения решений уравнений типа Янга-Бакстера – см. [20, 21]. В результате дискуссии с Корепановым мы пришли к выводу, что это преобразование связано с преобразованиями типа Лапласа для дискретных систем на триангулированных структурах, развивавшимися в работах авторов начиная с 1990х годов.

8 Приложение 3: Симплектические свойства операторов на графах.

В 1970 году один из авторов этой работы (Новиков) опубликовал работы [24, 25], посвященные применению симплектических идей (т.е. "Гамильтонова Формализма") в дифференциальной топологии и связанной с ней алгебраической K–теорией. Эти идеи не были подхвачены тогда достаточно широким сообществом – топологи их переизложили на абстрактном языке, забывающем общематематические идеи. Этот раздел топологии в 1970х гг стал дрейфовать в сторону изоляции, и хоронить идеи в глубоко замурованных гробницах.

Однако, с этими идеями познакомился Гельфанд, и они ему понравились. Он сделал важное наблюдение, которое и сообщил Новикову в 1971 году. Оказывается, фон-Неймановская теория расширений самосопряженных операторов, согласно Гельфанду, является по-существу, разделом симплектической алгебры, где ведущую роль играют Лагранжевы подпространства в симплектическом линейном пространстве. Этот язык не был известен в 1930х годах, он возник только в 1960х.. Все излагалось только на языке эрмитовых операторов.

Эти наблюдения Новикову удалось использовать только много лет спустя, начиная с работы [26] 1997 г. Приведем здесь некоторые из этих идей.

Рассмотрим граф Γ–возможно, бесконечный, но такой, что в каждой вершине сходится лишь конечное число ребер. Зададим вещественный самосопряженный оператор конечного порядка

$$L\psi_P = \sum_{P'} b_{P:P'}\psi_{P'}.$$

где расстояние ограничено $d(PP') \leq k$. Расстояние между вершинами определяется как минимальное число ребер соединяющего их пути. Самосопряженность (симметрия) оператора содержится в условии $\bar{b}_{PP'} = b_{P'P}$, то-есть их равенство в вещественном случае. Порядок оператора есть по определению $2k$.

Зафиксируем простой кратчайший ориентированный путь

$$\gamma(PP') = -\gamma(P'P)$$

соединяющий вершины P, P'. Для любой пары решений

$$L\psi = \lambda\psi, L\phi = \lambda\phi$$

мы определяем их **Симплектический Вронскиан**

$$< \psi, \phi >= \sum_{P,P'} b_{PP'}[\gamma(PP')](\psi_P\phi_{P'} - \phi_P\psi_{P'})$$

Это 1-цепь. Имеет место

Теорема. Симплектический Вронскиан $< \psi, \phi >= - < \phi, \psi >$ является билинейной формой на пространстве решений $L\psi = \lambda\psi$ со значением в открытых 1-гомологиях

$$0 = \partial < \psi, \phi >, \quad < \psi, \phi >\in H_1^{open}(\Gamma, R).$$

В работах, предшествовавших работе 1997года [26], эта величина не появлялась, и симплектические свойства не обсуждались.

По существу, это условие означает, что для тока $J = 1/2i < \Psi, \bar{\Psi} >$ в заряженном (т.е. комплексном) квантовом состоянии $\Psi = \psi + i\phi$ на графе выполнен закон Кирхгофа без какого-либо отвода тока в другие неконтролируемые направления. Квантовая система в чистом состоянии, описываемая ψ-функцией, всегда замкнута и консервативна. Через вершины ток, порожденный чистым квантовым состоянием, не идет: система замкнута. Сравнивая с Приложением 2, мы видим, что там описывалось принципиально неквантовое состояние, исключая случай $L\psi = 0$. В квантовой системе всегда вершины как бы свободно “висят в воздухе”.

Для графов с набором концов, уходящих в бесконечность, определяется понятие рассеяния. Если оператор имеет порядок 2 (т.е. $k = 1$) и коефициэнты тривиализуются на бесконечности (т.е. $b_{PP'} = 1, b_{PP} = -2$ для вершин ребра), то поведение на бесконечности при данном λ определяется лагранжевым подпространством половинной размерности $S \subset H_\infty$ в симплектическом пространстве, состоящим из всех решений, определенных около бесконечности: подпространство S состоит из всех решений, продолжаемых на весь граф. Оно оказывается лагранжевым, как следует из свойств Симплектического Вронскиана.

Зона рассеяния в квантовой теории отвечает (вещественным) энергиям λ, таким что базис решений на бесконечности комплесно сопряжен и унимодулярен. Матрица рассеяния A оказывается симметричной и унитарной. Это просто физический способ параметризации лагранжевых подространств, с точки зрения симплектической алгебры. Действительно, мы можем представить такую матрицу в виде $A = BB^t$, где B унитарна. Для $O \subset O_n$ мы имеем

$$A = BB^t = BOO^tB^t$$

так как $OO^t = 1$. Поэтому симметричные унитарные матрицы A параметризуются классами $B \in U_n/O_n, B \in S$. Это и есть многообразие лагранжевых подпространств половинной размерности.

Эти идеи развивались в работах [26, 27, 28, 29, 30, 31], включая работы Новикова, Новикова-Шварца, Шрадера и Кострыкина. В непрерывном случае лагранжевы подпространства берутся в каждой вершине, определяя условие сшивки. Для нелинейных уравнений на графах в работе Новикова и А.Шварца [29] определен аналог симплектического вронскиана, который является замкнутой 2-формой на многообразии решений нелинейного уравнения Эйлера-Лагранжа на графе со значением в $H_1^{open}(\Gamma, R)$.

Список литературы

[1] С.П. Новиков, “Алгебраические свойства двумерных разностных операторов”, УМН, **52**:1 (1997), 225-–226; англ. пер.: S. Novikov, “Algebraic properties of 2D difference operators”, Russian Math Surveys, **52**:1 (1997), 226–227.

[2] С.П. Новиков, И.А. Дынников, “Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностных операторов на правильных решетках и двумерных многообразиях”, УМН, **52**:5 (1997), 175-–234; англ. пер.: S. Novikov, I. Dynnikov, “Discrete spectral symmetries of low-dimensional differential operators and difference operators on regular lattices and two-dimensional manifolds”, Russian Math Surveys, **52**:5 (1997), 1057—1116.

[3] И.А. Дынников, С.П. Новиков, “Преобразования Лапласа и симплициальные связности”, УМН, **52**:6 (1997), 157–158; англ. пер.: I. Dynnikov, S. Novikov, “Laplace Transformations and simplicial connections”, Russian Math Surveys, **52**:6 (1997), 1294–1295.

[4] S. Novikov, A. Veselov, “Exactly Solvable 2-dimensional Schrödinger operators and Laplace Transformations”,

Appendix 1 (S. Novikov):Difference analogs of the Laplace Transformations,

Appendix 2 (S. Novikov, I.Taimanov): Difference analogs of harmonic oscillator.

AMS translations, 1997, ser 2 vol 179 pp 109-132

[5] S.Novikov, “Discrete Schrodinger Operator”, Proceeding of the Steklov Math Inst, **15** (1999), 275-290.

[6] И.М. Кричевер, С.П. Новиков, “Трехвалентные графы и солитоны”, УМН, **54**:6 (1999), 149–150; англ. пер.: I. Krichever, S. Novikov, “Trivalent Graphs and Solitons”, Russian Math Surveys, **54**:6 (1999), 1248-1249.

[7] I. Dynnikov, S. Novikov, “Geometry of the triangle equation on two-manifolds”, Moscow Math Journal, **3** (2003),(23 pages).

[8] Б.А. Дубровин, И.М. Кричевер, С.П. Новиков, “Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности”, ДАН, **229**:1 (1976), 15–18; англ. пер.: B.A. Dubrovin, I.M. Krichever, S.P. Novikov, “The Schrödinger equation in a periodic field and Riemann surfaces”, Soviet Math. Dokl. **17** (1977), 947-–951.

[9] С.П. Новиков, “Дискретные связности и разностные линейные уравнения”, Геометрическая топология и теория множеств, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения профессора Людмилы Всеволодовны Келдыш, Тр. МИАН, Наука, М., **247** (2004), 186—201; англ. пер.: S. Novikov, “Discrete Connections on triangulated manifolds and difference linear equations”, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **247** (2004), 168–183.

[10] S. Novikov. New discretization of complex analysis, arXiv math 0809:2663.

[11] S. Novikov. Four Lectures: Discretization and Integrability, a chapter in the special volume dedicated to the Semester in the Newton Institute, Cambridge, August–December 2001, edited by A.Mikhailov, published by Springer Verlag, 2008.

[12] S. Novikov, “Lectures on discrete systems”, a chapter in the volume “Symmetries and Integrability of Discrete Equations”, Workshop at the University of Montreal, June 13-20 2008, edited by D.Levi, P.Olver, Z.Thomova and P.Winternitz, London Math Society, Lecture Notes Series 381.

[13] П.Г. Гриневич, Р.Г. Новиков, “Ядро Коши для DN-дискретного комплексного анализа Новикова–Дынникова на треугольной решетке”, УМН, **62**:4 (2007), 155–156; англ. пер.: P.G. Grinevich, R.G. Novikov, “The Cauchy kernel for the Novikov–Dynnikov DN-discrete complex analysis in triangular lattices”, Russian Mathematical Surveys, **62**:4 (2007), 799–801.

[14] J. Weiss, “Period fixed points of Backlund transformations and KdV equation”, J.Math Phys., **27** (1980), 2647–2656.

[15] А.Б. Шабат, “К теории преобразований Лапласа–Дарбу”, ТМФ, **103**:1 (1995), 170–175; англ. пер.: A. Shabat, “To the Theory of Laplace-Darboux Transformations”, Theor Math Phys, **103**:1 (1995), 482–485.

[16] А.П. Веселов, А.Б. Шабат, “Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера”, Функц. анализ и его прил., **27**:2 (1993), 1–21; англ. пер.: A. Veselov, A. Shabat, “Dressing Chains and

the Spectral Theory of Schrodinger Operators", Funct. Analysis and Its Appl., **27**:2 (1993), 81–96.

[17] V. Spiridonov, L. Vinet, A. Zhedanov, "Difference Schrödinger operators with linear and exponential discrete spectra", Letters in Mathematical Physics, **29**:1 (1993), 63–73.

[18] A. Doliwa, "Geometric discretization of the Toda system", Phys. Lett. A **234** (1997), 187–192.

[19] A. Doliwa, "Lattice geometry of the Hirota equation", pp 93-100 in the book: Side III: Symmetries and Integrability of Difference Equations. Volume 25 of CRM proceedings & lecture notes. American Mathematical Soc., 2000

[20] R.M. Kashaev, "On discrete three-dimensional equations associated with the local Yang-Baxter relation", Letters in Mathematical Physics **38**:4 (1996), 389–397.

[21] И.Г. Корепанов, "A Dynamical System Connected with Inhomogeneous 6-Vertex Model", Зап. научн. семинаров ПОМИ СПб, **215** (1994), 178–196.

[22] T. Miwa, "On Hirota's Difference Equations", Proc. Japan Acad., **58**, Ser. A (1982), 9–12.

[23] A.E. Kennelly, "The equivalence of triangles and three-pointed stars in conducting networks", Electrical world and engineer.- New York, **34**:12 (1899), 413–414.

[24] С.П. Новиков, "Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов K-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов. I", Изв. АН СССР. Сер. матем., **34**:2 (1970), 253–288; англ. пер.: S.P. Novikov, "Algebraic construction and properties of hermitian analogs of K-theory over rings with involutions from the viewpoint of hamiltonian formalism. Applications to differential topology and the theory of characteristic classes. I", Mathematics of the USSR-Izvestiya, **4**:2 (1970), 257–292

[25] С.П. Новиков, “Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов K-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов. II”, Изв. АН СССР. Сер. матем., **34**:3 (1970), 475–500; англ. пер.: S.P. Novikov, “Algebraic construction and properties of hermitian analogs of K-theory over rings with involutions from the viewpoint of hamiltonian formalism. Applications to differential topology and the theory of characteristic classes. II”, Mathematics of the USSR-Izvestiya, **4**:3 (1970), 479–505.

[26] С.П. Новиков, “Оператор Шрёдингера на графах и топология”, УМН, **52**:6 (1977), 177–178; англ. пер.: S.P. Novikov, “The Schödinger operator on graphs and topology”, Russian Mathematical Surveys, **52**:6 (1997), 1320–1321

[27] S.P. Novikov, “Discrete Schrödinger Operators and Topology”, Asian Journal of Mathematics, **2**:4 (1998), 921–934. Dedicated to the 70th birthday of Mikio Sato.

[28] S.P. Novikov, “Schrödinger Operators on Graphs and Symplectic Geometry”, Fields Institute Communications, **24** (1999), 397–413. Dedicated to the 60-th birthday of V. Arnold.

[29] С.П. Новиков, А.С. Шварц, “Дискретные лагранжевы системы на графах. Симплекто-топологические свойства”, УМН, **54**:1 (1999), 257–258; англ. пер.: S.P. Novikov, A.S. Shvarts, “Discrete Lagrangian systems on graphs. Symplectic-topological properties”, Russian Mathematical Surveys, **54**:1 (1999), 258–259.

[30] V. Kostrykin, R. Schrader, “Kirchhoff’s rule for quantum wires”, J. Phys. A: Math. Gen., **32** (1999), 595–630.

[31] V. Kostrykin, R. Schrader, “Kirchhoff’s rule for quantum wires. II: The inverse problem with possible applications to quantum computers”, Fortschritte der Physik, **48** (2000), 703–716.

П.Г. Гриневич, Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, просп. Академика Семенова, д. 1-А, г. Черноголовка, Московская область, 142432, Россия, Тел.: +7 (495) 702-93-17 (раб.), +7-(499)-972-39-22 (дом.), +7-(903)-543-35-37 (моб.) pgg@landau.ac.ru;

С.П. Новиков, Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, просп. Академика Семенова, д. 1-А, г. Черноголовка, Московская область, 142432, Россия, Тел.: +7 (495) 702-93-17 (раб.) и Institute for Physical Sciences and Technology, University of Maryland at College Park, College park, MD, 20742, USA, novikov@ipst.umd.edu.

P.G. Grinevich, S.P. Novikov

Discrete SL_2 Connections and Self-Adjoint Difference Operators on the Triangulated 2-manifolds

Abstract. *Discretization Program of the famous Completely Integrable Systems and associated Linear Operators has been developed since 1990s. In particular, specific properties of the second order difference operators on the triangulated manifolds and equilateral triangle lattices were studied in the works of S.Novikov and I.Dynnikov starting from 1996. They involve factorization of operators, the so-called Laplace Transformations, new discretization of Complex Analysis and new discretization of GL_n connections on the triangulated n-manifolds. The general theory of the new type discrete "rank 1" GL_n connections was developed (for the definition see the Introdiution). However, the special case of SL_n-connections (and unimodular $SL_n^{\pm}$ connections such that* $\det A = \pm 1$ *) was not selected properly. As we prove in this work, it plays fundamental role (similar to magnetic field in the continuous case) in the theory of self-adjoint discrete Schrödinger operators for the equilateral triangle lattice in $\mathbb{R}^2$. In the Appendix 1 we obtain a complete characterization of the rank 1 unimodular $SL_n^{\pm}$ connections for all $n > 1$, therefore we correct our mistake (we wrongly claimed that for $n > 2$ every unimodular $SL_n^{\pm}$ Connection is equivalent to the standard Canonical Connection). Using communications of Korepanov we completely clarify connection of classical theory of electric chains and star-triangle with discrete Laplace transformation on the triangle lattices* [3].

[3]The works of S.Novikov with and without collaborators quoted here can be found in his homepage *www.mi.ras.ru/˜snovikov* click Publications, items 136,137,138,140,146,148,159,163, 173,174,175.