О нулевом уровне чисто магнитного двумерного нерелятивистского оператора Паули (спин =1/2)

П.Гриневич [1],
ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН, Черноголовка
E-mail: pgg@landau.ac.ru

А.Миронов[2],
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
E-mail: mironov@math.nsc.ru

С.Новиков[3] [4]
University of Maryland, College Park;
ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН, Черноголовка
E-mail: novikov@ipst.umd.edu

On the 0-level of purely magnetic nonrelativistic 2D Pauli Operator (spin 1/2)

P.Grinevich, A.Mironov, S.Novikov

Abstract

Full manifold of the Complex Bloch-Floquet Eigenfunctions is investigated for the 0 level of 2D Pauli Operator describing the motion of

[1]П.Гриневич был поддержан грантом РФФИ 09-01-12148-офи-м и программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”

[2]А.Миронов был поддержан грантом РФФИ 09-01-00598-а

[3]С.Новиков был поддержан грантом РФФИ 08-01-00054-а

[4]Все работы С.П.Новикова,цитируемые в списке литературы, могут быть взяты с персональной страницы С.П.Новикова http://www.mi.ras.ru/˜snovikov. Для входа в список литературы нажать **Publications.**

the charged particle in periodic magnetic field with zero flux through the elementary cell, and zero electric field. It is completely calculated for the broad class of the Algebro-Geometric Operators found in this work. Let us remind that for the case of nonzero flux the Ground State Problem was solved by Aharonov-Casher (1979) for the rapidly decreasing fields, and by Dubrovin-Novikov (1980) for the periodic fields. No Algebro-Geometric Operators where known in the case of nonzero flux. The complex extension of the manifold of "Magnetic" Bloch-Floquet eigenfunctions has very bad properties at infinity. We found many good nonsingular "Algebro-Geometric" periodic fields (with zero flux through the elementary cell of the lattice) associated with genus zero Complex Riemann Surface. For higher genuses we found periodic operators with very interesting magnetic fields. The algebro-geometric case of genus zero leads also to the "Soliton-Like" nonsingular magnetic fields with magnetic flux through the disc of radius R asymptotically proportional to the radius R (i.e. total magnetic flux is slowly divergent at $R \to \infty$). The especially interesting variety of ground states in the Hilbert Space $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$ is found for this case.

0 Введение. Магнитный оператор Паули и факторизуемые операторы Шрёдингера.

Двумерный оператор Паули для заряженных частиц со спином 1/2, движущихся в электрическом и магнитном полях $E_\alpha = \partial_\alpha U$, A_α имеет вид (см. учебник [1], пусть заряд $e = 1$, $m = 1/2$, мы пренебрегаем несущественными универсальными постоянными c, $\hbar$) в калибровке Лоренца

$$L^P = \sum_{\alpha=1,2} (p_\alpha)^2 + B\sigma_3 + U, \; ip_\alpha = \partial_\alpha + iA_\alpha, \; \sum_{\alpha=1}^{2} \partial_\alpha A_\alpha = 0 \qquad (1)$$

в нерелетявистском приближении, σ_α-матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для случая $E = 0$ он приводится к прямой сумме двух скалярных операторов Шрёдингера, которые (пренебрегая не играющими сейчас роль константами) имеют “факторизованный” вид (см. [2, 3, 4]:

$$L^P = QQ^+ \oplus Q^+Q = L_+ \oplus L_- \tag{2}$$

Здесь $Q = \partial + A$, $Q^+ = -(\bar\partial - \bar A)$, $-\bar A = A^{(\bar z)}$ причём $\bar\partial A + \partial \bar A = 2B$ – магнитное поле, $\partial = \partial_x - i\partial_y$, $\bar\partial = \partial_x + i\partial_y$, $\partial\bar\partial = \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Магнитное поле B направлено ортогонально к плоскости (x, y), которая ориентирована. Поэтому магнитное поле имеет знак. Для поля B, быстроубывающего при $x^2 + y^2 \to \infty$, магнитный поток $\{B\}$ конечен. Оператор L^P неотрицателен. Поэтому основным состоянием может быть либо нулевая энергия $\varepsilon_0 = 0$, либо $\varepsilon_0 > 0$. Если $|\{B\}| \geq 1$ (в естественных квантовых единицах), то основное состояние представляет собой линейное пространство размерности $[\{B\}] = m$. Для периодического случая и целочисленного потока $\{B\} \in \mathbb{Z}$ пространство основных состояний бесконечномерно и изоморфно уровню Ландау в однородном магнитном поле (см. [3, 4]). Высшие уровни отделены от основного **ненулевой щелью** $\Delta_B > 0$. Согласно более поздней литературе 80-х годов, этот оператор допускает “суперсимметрию” $P : L_+ \to L_- \to 0$, $P^2 = 0$, $P : \Psi \to Q_+\Psi$ для $\{B\} > 0$, $\Psi \in L_+$; все уровни $\varepsilon > 0$ двукратно вырождены, так как $(\Psi, P\Psi)$ обе являются собственными исключая случай “инстантонов” или “основных состояний”, где $P\Psi = 0$, $\varepsilon_0 = 0$, если функция Ψ годится для обслуживания Гильбертова пространства $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$. На более древнем языке, восходящем к XIX (и даже XVIII) векам, имеется “преобразование Лапласа” скалярных 2D операторов 2 порядка (см. [11])

$$\begin{aligned} &L = (\partial_x + A)(\partial_y + D) + U,\ U = e^f \\ &L \to \tilde L = e^f(\partial_y + D)e^{-f}(\partial_x + A) + U \\ &\Psi \to \tilde\Psi = (\partial_y + D)\Psi \end{aligned} \tag{3}$$

причём $L\Psi = 0$ влечет $\tilde L\tilde\Psi = 0$. Мы имеем здесь $L = Q_1Q_2 + U$.

В самосопряжённом эллиптическом случае, изучавшемся подробно в [11] с точки зрения спектральных свойств операторов, мы имеем

$$\begin{aligned} &L = QQ^+ + U,\ U = e^f \\ &Q = (\partial + A),\ Q^+ = -(\bar\partial - \bar A). \end{aligned} \tag{4}$$

Для “чисто факторизуемых” операторов $U = \mathrm{const}$ мы имеем $\tilde L = Q^+Q + U$ (пусть $U = 0$). Здесь преобразование $\Psi \to \tilde\Psi = Q^+\Psi$ совпадает с “суперсимметрией" и действует на весь спектр $L\Psi = \varepsilon\Psi$, $\tilde{L}\tilde{\Psi} = \varepsilon\tilde{\Psi}$. Основные состояния L являются "инстантонными", т.е. удовлетворяют уравнению $Q^+\Psi = 0$, если $\Psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$. Если нулевая мода $L\Psi = 0$ растет не быстрее многочлена при $x^2 + y^2 \to \infty$, то инстантонный аргумент исчезает. В последнем случае точка $\varepsilon_0 = 0$ является дном непрерывного спектра для L. Если таких "инстантонных" Ψ не существует, то отсюда еще нельзя строго заключить, что истинное основное состояние для оператора Lтаково, что $\varepsilon_0 > 0$. Для случая ненулевого потока $\{B\} \neq 0$ основное состояние оператора Паули есть $\varepsilon_0 = 0$, причем для $L^P = L_+ \oplus L_-$ оно реализуется либо внутри сектора $L = L_+$ (если $\{B\} > 0$) или $L = L_-$ (если $\{B\} < 0$) – см. [2, 3, 4], в быстроубывающем и периодическом случае (см. также [5], где рассматривались другие функциональные классы магнитных полей). Весь остальной спектр двукратен и отделен от нуля положительной щелью Δ_β. Интересные классы "факторизуемых" операторов L, имеющие еще один вырожденный уровень, кроме основного, были найдены в [11]. Эти работы имеют "солитонное" происхождение: связь преобразований Лапласа с так называемой "двумеризованной цепочкой Тоды", открытая в теории солитонов, была известна еще в XIX веке Дарбу и его школе, но вычисления в конце XIX - начале XX века носили чисто формальный характер, эллиптический случай отсутствовал вообще.

В данной работе мы исследуем случай **нулевого магнитного потока**. Здесь возникает целое комплексное многообразие функций Блоха-Флоке $L\Psi = 0$, которое может иметь конечный род. Этот случай называется "алгеброгеометрическим". Чисто факторизуемая редукция самосопряжённого оператора Шрёдингера $L = -(\partial + A)(\bar{\partial} - \bar{A})$ впервые изучается здесь с точки зрения теории Алгебро-Геометричеких операторов. Она была обнаружена авторами лишь недавно [12], но при этом оператор $L = \partial_x\partial_y + G\partial_y$ был гиперболическим в работе [12], а второй оператор $H = \Delta + F\partial_y + A$ не мог быть самосопряжённым в нетривиальных примерах.

1 Алгеброгеометрические самосопряжённые факторизуемые операторы. Данные обратной спектральной задачи.

Итак, чисто магнитный 2D оператор Паули $L^P = L_+ \oplus L_-$ есть прямая сумма двух чисто факторизуемых операторов Шрёдинегера

$$L_+ = QQ^+, \ L_- = Q^+Q$$
$$Q = (\partial + A), \ Q^+ = -(\bar{\partial} - \bar{A}).$$

Следуя [13], напомним, что такое алгеброгеометрический оператор с периодическими коэффициентами A, U

$$L = -(\partial + A)(\bar{\partial} + D) + U,$$

где A, D, U периодичны по x, y.

Опишем данные обратной задачи: дается неособая риманова поверхность Γ рода $g > 0$ с двумя отмеченными точками ∞_1, ∞_2, около которых заданы локальные параметры $k'^{-1}(\infty_1) = 0$, $k''^{-1}(\infty_2) = 0$. Пусть задан также набор из g точек ("дивизор" степени g) $\mathcal{D} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_g)$. Мы пишем $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 + \ldots + \mathcal{P}_g$. Определяется "двухточечная функция Бейкера-Ахиезера", введенная в [13], $\Psi(\mathcal{P}, x, y)$, $\mathcal{P} \in \Gamma$, которая

a) мероморфна по переменной $\mathcal{P}$;

b) имеет асимптотику около ∞_1, ∞_2 с локальными параметрами k', k'':

$$\infty_1 : \Psi = c(x,y)e^{k'\bar{z}}\left(1 + O\left(\frac{1}{k'}\right)\right), \qquad \frac{1}{k'}\left(\infty_1\right) = 0$$
$$\infty_2 : \Psi = e^{k''z}\left(1 + O\left(\frac{1}{k''}\right)\right), \qquad \frac{1}{k''}\left(\infty_2\right) = 0.$$

c) Ψ имеет полюса 1 порядка в точках дивизора $\mathcal{D}$, не зависящие от x, y.

d) $\Psi \equiv 1$ при $x = 0$, $y = 0$.

Тогда эта функция удовлетворяет уравнению

$$L\Psi = 0, \ L = \partial\bar{\partial} - 2(\ln c)_z \bar{\partial} + U(x, y).$$

Функция Ψ является функцией Блоха-Флоке, если $c(x,y)$, $U(x,y)$ – периодичны. Вообще говоря, они квазипериодичны, но для всюду плотного множества римановых поверхностей Γ эти функции периодичны. Можно написать Ψ, c, U явными формулами через Θ-функции, как это стандартно делается в периодической теории солитонов (см. [13] и обзоры [16], [17]). Чисто потенциальная редукция $c \equiv 1$ была найдена для этих данных в [14], [15]. Условия самосопряжённости в присутствии магнитного поля $B = -\Delta(\ln c)/2 = -\partial\bar{\partial}(\ln c)/2 \neq 0$ было найдено в [18]: Надо, чтобы существовала антиголоморфная инволюция $\sigma : \Gamma \to \Gamma$, $\sigma^2 = 1$, $\sigma(\infty_1) = \infty_2$, такая, что

$$\sigma(k') = -\overline{k''},\ \sigma(\mathcal{D}) \sim (K) + \infty_1 + \infty_2, \tag{5}$$

где (K) – дивизор нулей и полюсов голоморфных дифференциаяльных форм, и значок $\sim$ означает так называемую "линейную эквивалентность" дивизоров, т.е. нулевым считается дивизор нулей и полюсов мероморфной функции.

Опишем **"данные обратной задачи"** для нашей редукции. Это – результат настоящей работы.

Риманова поверхность Γ вырождается так, что

$$\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma'', \infty_1 \in \Gamma',\ \infty_2 \in \Gamma'',$$

и пересечение $\Gamma' \cap \Gamma''$ – это набор из $k+1$ точки $Q'_0,\dots,Q'_k$.

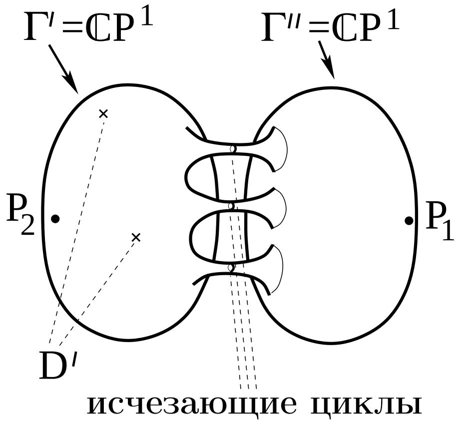


Рис 1. $g = 0$

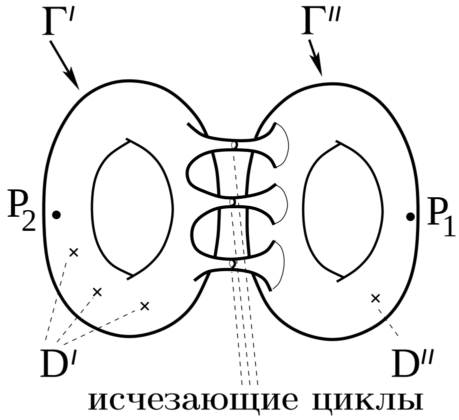


Рис 2. $g = 1$

Надо, чтобы была задана антиголоморфная инволюция $\sigma : \Gamma' \to \Gamma''$, $\Gamma'' \to \Gamma'$, переставляющая точки $\infty_1 \underset{\sigma}{\to} \infty_2$, $\infty_2 \underset{\sigma}{\to} \infty_1$, $(Q'_0,\dots,Q'_k) \underset{\sigma}{\to}$

$(Q'_{i_0},\ldots,Q'_{i_k})$. Пусть $g = \quad \Gamma' = \quad \Gamma''$. Надо задать $g+k$ точек $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}'_1,\ldots,\mathcal{P}'_{g+k})$ на Γ' и g точек $\mathcal{D}'' = (\mathcal{P}''_1,\ldots,\mathcal{P}''_g)$ на Γ'', удовлетворяющие соотношению линейной эквивалентности:

$$\sigma(\mathcal{D}'+\mathcal{D}'')+\mathcal{D}'+\mathcal{D}'' \sim (K)+\infty_1+\infty_2 \ \text{ на } \ \Gamma, \tag{6}$$

где $(K) = (K')+(K'')$ – с условиями на вычеты соответствующей 1-формы, чей дивизор равен (K):

$$\begin{gathered}\omega = \omega' \ \ (\text{на } \Gamma')\\ \omega = \omega'' \ \ (\text{на } \Gamma'')\\ -\operatorname*{Res}_{Q_j} \ \omega' = \operatorname*{Res}_{R_j=\sigma(Q_j)} \omega'', \ \ \sigma(R) = Q.\end{gathered}$$

Переформулируем это в терминах одной кривой Γ' с локальным параметром $1/k'$, набором точек Q_0,…,Q_n и $\sigma(Q_j) = Q_{\sigma(j)}$.

Ищем Ψ-функцию на Γ' такую, что:

1) Она имеет полюса 1 порядка в точках $\mathcal{D}'$, ($g+k$ штук).

2) Она имеет асимптотику около ∞_1:

$$\Psi = c(x,y)e^{k'\bar z}\left(1+O\left(\frac{1}{k'}\right)\right)$$

3) $\Psi\big|_{Q'_j} = \varphi_j(z)$ голоморфны по z.

На поверхности Γ' дана $(k+1)$ точка $Q''_0 = Q'_{i_0}$,…,$Q''_k = Q'_{i_k}$ и определена функция Бейкера-Ахиезера φ (одноточечная) со свойствами: $\varphi(\mathcal{P},z)$ антиголоморфна по $\mathcal{P}\in\Gamma'$; она имеет неподвижный дивизор полюсов первого порядка $\sigma(\mathcal{D}'')$ и асимптотику

$$\varphi \sim e^{-\bar k' z}\left(1+O\left(\frac{1}{\bar k'}\right)\right), \ \varphi\equiv 1 \ \text{ при } \ x=0, y=0.$$

Надо выполнить условие

$$\sigma(\mathcal{D}'')+\mathcal{D}' = (Q)+(K')_{\Gamma'}+\infty_1$$

с условием на вычеты (выше) в точках $Q_j \sim Q_{\sigma(j)}$ для формы, определяющей (K').

Мы полагаем
$$\varphi_j(z) = \varphi(Q''_j, z), \quad Q''_j = Q'_{\sigma(j)} \tag{7}$$
Мы описали всё в терминах одной поверхности Γ', так как $\Gamma'' = \sigma(\Gamma')$.

При этих условиях мы устанавливаем, что функция $\psi(\mathcal{P}, z, \bar{z})$ на поверхности $\Gamma' \ni \mathcal{P}$ удовлетворяет уравнению по параметрам z, $\bar{z}$:
$$\tilde{L}_+\Psi = 0, \quad \tilde{L}_+ = (\partial + \tilde{A})\bar{\partial},$$
где $\tilde{A} = -\partial \ln c$. При этом найдется константа $\alpha \neq 0$ такая, что функция (αc) является вещественной. Она порождает симметричный оператор по правилу: пусть
$$\begin{aligned} & c = e^{2\Phi}, \; L_+ = -e^{-\Phi}(\partial + \tilde{A})\bar{\partial}e^{\Phi} = \\ & = -(\partial + A)(\bar{\partial} - \bar{A}) = QQ^+, \quad A = \tilde{A}/2 \\ & \Psi \Rightarrow e^{-\Phi}\Psi = \frac{1}{\sqrt{c}}\Psi, \; 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c}}. \end{aligned} \tag{8}$$
Оператор L_+ является несингулярным, если существует константа α такая, что $\alpha c(x, y) > 0$. Пусть $\varepsilon_0 = 0$ для L_+ является точкой спектра. Кандидатом на основное состояние является функция $1/\sqrt{c}$, удовлетворяющая уравнению
$$Q^+\left(1/\sqrt{c}\right) = (-\bar{\partial} + \bar{A})e^{-\Phi} = 0 \tag{9}$$
Так как $(\partial + A)e^{\Phi} = 0$, то e^{Φ} тоже является кандидатом на основное состояние для оператора $L_- = Q^+Q$. Однако это верно, если выполнены условия принадлежности к спектру в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$. Они таковы:

a) Если коэффициенты периодичны (квазипериодичны), то в неособом случае $\alpha c > 0$ обе функции $\sqrt{\alpha c}$, $\sqrt{1/\alpha c}$ являются положительными и условия выполнены. Мы знаем, что $A = -(\partial \ln c)/2$, $B = -(\Delta \ln c)/2$. при этом магнитный поток равен нулю:
$$0 = \iint\limits_{\Box} B dz \wedge d\bar{z}, \quad \text{где } \Box - \text{ элементарная ячейка.}$$
Это верно, поскольку $B = -(\partial\bar{\partial}\ln c)/2$, $Bdz \wedge d\bar{z} = -\Phi_{z\bar{z}}dz \wedge d\bar{z} = -d(\Phi_z dz) = 1/2 \cdot d(Adz)$– интеграл от точной формы.

b) Рассмотрим экспоненциальный случай.

Основные состояния оператора Паули:

Пусть $L = L_+ \oplus L_-$, $L_+ = QQ^+$, $L_- = Q^+Q$, где $Q = (\partial + A)$, $Q^+ = (-\bar{\partial} + \bar{A})$, и $A = -2\Phi_z$, $\bar{A} = -2\Phi_{\bar{z}}$, где Φ-вещественная.

Во всём классе $c \to e^W c = c'$, где $W = \alpha x + \beta y$ для вещественных α, β мы имеем одно и то же магнитное поле $B = -\Delta\Phi = -(\Delta \ln c)/2 = -(\Delta \ln(ce^W))/2$. Операторы L_+ и L'_+ унитарно эквивалентны. Действительно, мы имеем:

$$L_\pm = -(\partial_x - i\Phi_y)^2 - (\partial_y + i\Phi_x)^2 \pm \Delta\Phi \tag{10}$$

$$L'_\pm = -(\partial_x - i\Phi_y - i\beta/2)^2 - (\partial_y + i\Phi_x + i\alpha/2)^2 \pm \Delta\Phi \tag{11}$$

Унитарное калибровочное преобразование

$$\Psi \to \Psi e^{i(-\beta x + \alpha y)/2} = \Psi' \tag{12}$$

$$L_+ \to L'_+,\ L_- \to L'_- \tag{13}$$

осуществляет их эквивалетнность. Если функция $\sqrt{c'}$ или $1/\sqrt{c'}$ ограничена, то $\varepsilon_0 = 0$, и эта функция обслуживает спектр в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$. Мы имеем $\Psi_+ = e^{-i(\alpha x - \beta y)/2}\sqrt{c'}$, для L_+, $\Psi_- = e^{-i(\alpha x - \beta y)/2} 1/\sqrt{c'}$ для L_-. Таким образом мы построили столько различных функций основного уровня $\varepsilon_0 = 0$ для L_+ или L_-, сколько в классе $\{e^W c\}$ имеется ограниченных функций $\{e^W c\}$ или $\{e^{-W} c^{-1}\}$.

Пример 1. Пусть $c = 1 + e^y$ не зависит от x. Здесь c^{-1} ограничена а c- неограничена. Если $c'_{\alpha\beta} = e^{\alpha x + \beta y} c$, то для ограниченности функции $1/c'$ надо выполнить условия: $\alpha = 0$, $-1 \le \beta \le 0$. Мы получаем **континуум собственных функций уровня** $\varepsilon_0 = 0$, нумеруемых индексом β:

$$\Psi_\beta = e^{i\beta x/2} \cdot 1/\sqrt{c'},\ \beta \in [-1, 0]$$

для оператора L. Здесь $c_{0,0} = c$, $\Psi_0 = 1/\sqrt{c}$. **Неограниченные** $(\sqrt{c}, 1/\sqrt{c})$ **удовлетворяют уравнению** $L_+(\sqrt{c}) = 0$**,** $L_-(1/\sqrt{c}) = 0$**, но не принадлежат спектру.**

Итак, мы получаем вывод:

Для экспоненциальных $c > 0$ уровень $\varepsilon_0 = 0$ для чисто магнитного поля $\Delta \ln c = B$ является нижней точкой спектра если в классе $\{e^{\alpha x + \beta y} c\}$

для вещественных α, β имеется ограниченная функция $c' = e^{\alpha x+\beta y}c$ или $1/c' = e^{-\alpha x-\beta y}/c$, $L^P = L_+ \oplus L_-$.

Вероятно это условие и необходимо.

В **гладком** периодическом случае мы знаем, что гладкие двоякопериодические функции $\sqrt{c}$ и $1/\sqrt{c}$ являются основными состояниями. Они периодичны, так что всегда $\varepsilon_0 = 0$ для L и основное состояние двукратно, в отличие от случая ненулевого магнитного потока [2, 3, 4].

В следующих параграфах мы приводим вычисления для родов $g = 0, 1$.

2 Алгеброгеометрические самосопряженные факторизуемые операторы.

2.1 Решения рода g=0.

В случае рода ноль наша Ψ-функция пишется в виде ($k = k' \in \Gamma'$):

$$c \equiv u_0, \Psi = e^{k\bar{z}}\frac{u_0k^n + \cdots + u_n}{(k-a_1)\ldots(k-a_n)},\ \mathcal{D}' = (a_1, \ldots, a_n) \qquad (11)$$

для (n=число точек пересечения-1)

$$\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma'',\ \Gamma' = \Gamma'' = S^2$$

с локальными параметрами $k = k'(\Gamma')$ и $p = k''(\Gamma'')$; точки ∞_1, ∞_2 имеют вид $k = \infty(\infty_1)$, $p = \infty(\infty_2)$. Мы имеем $\varphi(z,p) = e^{pz}$, точки пересечения имеют вид $k_0, \ldots, k_n$ для Γ' и $p_0, \ldots, p_n$ для Γ. Уравнения для Ψ имеют вид

$$\Psi|_{k=k_j} = e^{p_jz}, j = 0, \ldots, n. \qquad (12)$$

Таким образом, наше решение имеет вид:

$$c = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j e^{W_j(z,\bar{z})}\theta_j\frac{\Delta^{(n-1)}}{\Delta^{(n)}}, W_j = p_jz - k_j\bar{z}, \qquad (13)$$

исходя из системы линейных уравнений

$$
\begin{cases} u_0 k_0^n + \dots + u_n = (k_0 - a_1)\dots(k_0 - a_n) e^{p_0 z - k_0 \bar z} \\ \dots\ \dots\ \dots \\ u_0 k_n^n + \dots + u_n = (k_n - a_1)\dots(k_n - a_n) e^{p_n z - k_n \bar z}. \end{cases} \tag{14}
$$

Здесь

$$
\Delta^{(n)} = \left\| \begin{matrix} k_0^n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ k_n^n & \dots & 1 \end{matrix} \right\| = \sqcap_{i<j}(k_i - k_j)
$$

и $\Delta_j^{(n-1)}$ — аналогичные определители Вандермонда с наборами чисел $(k_0, \dots, \hat k_j, \dots, k_n)$, где k_j убрано, $\theta_j = (k_j - a_1)\dots(k_j - a_n)$; $u_0 = c$.

Величина $c(x,y) = u_0$ определяется полем B с точностью до $c \to \alpha e^W c = c'$, где $\alpha = const$, $W = \gamma z + \delta \bar z$, так как магнитное поле $B = -(\Delta \ln c)/2$ и $-(\Delta \ln c')/2 = -(\Delta \ln c)/2$, $\Delta = \partial \bar\partial$. Таким образом мы имеем ровно n неизвестных коэффициентов в формуле (15):

$$
j = 0, \dots, n,\ c = \sum_{q=0}^{n} \kappa_q e^{W_q(z, \bar z)}, \tag{15}
$$

если k_j, p_j все заданы (κ_q определяются с точности до общего множителя).

Для дифференциалов

$$
\Omega_1 = \frac{(k-a_1)\dots(k-a_n)dk}{(k-k_0)\dots(k-k_n)},\ \Omega_2 = \frac{s(p+\bar a_1)\dots(p+\bar a_n)dp}{(p-p_0)\dots(p-p_n)},
$$

где s — некоторая константа, должно выполняться условие на вычеты

$$
\mathrm{Res}_{k_j}\Omega_1 + \mathrm{Res}_{p_j}\Omega_2 = 0.
$$

Выбирая надлежащие дивизоры $\mathcal{D}' = (a_1, \dots, a_n)$ мы получаем значения комплексных коэффициентов $\kappa_j \in \mathbb{C}$.

Нас интересуют такие дивизоры $\mathcal{D}'$ и выбор $W_j = p_j z - k_j \bar z$, что величина c — вещественная и положительная в классе эквивалентности $c \to \alpha e^W c = c'$, $\alpha = const$.

Для вещественности c при вещественных (x,y), $z = x + iy$, $\bar z = x - iy$ наше выражение должно состоять из таких слагаемых:

1. Для данного j мы имеем слагаемое "экспоненциального типа"

$$\bar{p}_j = -k_j, W_j = p_j z + \overline{p_j z},$$

κ_j — вещественно, $\kappa_j e^{W_j}$ — вещественно (чисто вещественная экспонента)

2. Для пары индексов (j,l) мы имеем слагаемое "смешанного типа", если:

$$p_l = -\bar{k}_j, k_l = -\bar{p}_j,$$

$\bar{\kappa}_j = \kappa_l$, $\kappa_j e^{W_j} + \kappa_l e^{W_l} = \kappa_j e^{W_j} + \bar{\kappa}_l e^{\bar{W}_l}$ — вещественно. Мы считаем, что все точки $k_j \neq k_q$, $j \neq q$ и $p_j \neq p_q$, $j \neq q$ различны.

Для случая 1: Получаем слагаемые вида вещественной экспоненты $\kappa e^{(\alpha_j x + \beta_j y)}$, где $p_j = \alpha_j + i\beta_j, k_j = -\bar{p}_j$, $\kappa - \bar{\kappa} = 0$.

Для случая 2: Получаем слагаемые вида

$$e^{W_{R,j}}(\kappa_j' \cos W_{I,j} - \kappa_j'' \sin W_{I,j}), \kappa_j = \kappa_j' + i\kappa_j'',$$

$W_j = W_{R,j} + iW_{I,j} = [(\alpha_j - \gamma_j)x - (\beta_j - \delta_j)y] + i[(\beta_j - \delta_j)x + (\alpha_j + \gamma_j)y]$,

где $p_j = -\bar{k}_q = \alpha_j + i\beta_j, k_j = -\bar{p}_q = \gamma_j + i\delta_j$.

Если $W_{I,j} = 0$, мы имеем случай 1: $p_j = -\bar{k}$.

3. Чисто "тригонометрический тип" мы получаем, если в случае 2 смешанного типа выполнено условие: $W_{R,j} = 0$ или $\alpha_j = \gamma_j, \beta_j = -\delta_j$, т.е. $k_j = \bar{p}_j$, то есть $W_{I,j} = (\beta_j x + \alpha_j y), e^{W_j} = e^{p_j z - \bar{p}_j \bar{z}}$.

Во всех этих случаях решения для c вещественны. Смешанный тип 2 ведет к нулям величины c и тем самым к сингулярностям магнитного поля, если нули не "блокированы" другими слагаемыми.

1. Рассмотрим **чисто экспоненциальный тип первоначально.** Мы имеем

$$c = \sum_j \kappa_j e^{W_j(x,y)},\ c \to \kappa e^W c = c',$$

где κ_j — вещественны. Пусть $c = c^+ + c^-$, где $\kappa_j > 0$ для $j \in \mathrm{I}$, $\kappa_j < 0$ $j \in \mathrm{II}$. Пусть первоначально $c = c+$, т.е. $\kappa_j > 0$ для всех j. Здесь $c > 0$. Мы увидим ниже, когда магнитное поле $B = -(\Delta \ln c)/2$ ограничено в $\mathbb{R}^2$. В классе $\{\kappa e^W c\}$ оба $\sqrt{c'}$, $\frac{1}{\sqrt{c'}}$ ограничены быть не могут. Либо они оба экспоненциально растут при $x^2 + y^2 \to \infty$, либо одно из них (т.е. $(1/\sqrt{c'})$) ограничено. В последнем случае пара $\{c, W\}$, определяет основное состояние.

2. Рассмотрим чисто тригонометрический случай. Здесь мы имеем случаи четного и нечетного числа точек.

$$a)\; c = \sum_{j=0}^{\frac{(1+n)}{2}} \kappa_j' \cos W_{I,j} + \kappa_j'' \sin W_{I,j},\ \mathbf{n-нечётно,\ число\ точек\ n+1\ чётно},$$

где $\kappa_j = \kappa_j' + i\kappa_j'', W_j = iW_{I,j} = -k_j\bar{z} - \bar{k}_j z, k_j = \alpha_j + i\beta_j$. Здесь функция c всегда имеет нули.

$$b)\; c = 1 + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \kappa_j' \cos W_{I,j} + \kappa_j'' \sin W_{I,j},\ \mathbf{n-чётно,\ число\ точек\ n+1\ нечётно}.$$

При надлежащих константах $\kappa', \kappa'' \in \mathbb{R}$ имеем $c > 0$ и магнитное поле $B = -(\Delta \ln c)/2$ гладко, периодично и имеет нулевой поток сквозь элементарную ячейку двояко-периодической решетки (или квазипериодическое среднее, если c — квазипериодично). Соответствующие области в пространстве констант было бы интересно описать. Они ограничены. Набор прямых $W_{I,j} = \alpha_j x + \beta_j y$, проходящий через начало координат, должен быть таков, что все они проходят через целочисленные векторы некоторой решетки в плоскости $\mathbb{R}^2$, а коэффициенты α_j, β_j тоже должны быть рационально кратными числу 2π. В противном случае поля — квазипериодичны. Наш **вывод** состоит в том, что в регулярном тригонометрическом случае обе функции $\sqrt{c}$, $1/\sqrt{c}$ **периодичны, положительны и являются основными состояниями в обоих секторах** L_+, L_-. В общем квазипериодическом случае все обстоит так же.

Любопытное замечание. Имеются "критические" значения констант κ_j' κ_j'', такие, что c имеет изолированный нуль $c = 0$ (т.е. решетка из изолированных нулей). Можно подобрать параметры так, чтобы в этой точке имело место $d^2c = a^2(dx^2 + dy^2)$. Тогда магнитное поле δ-образную особенность $B = -(\Delta \ln c)/2 \sim \delta(x - x_0, y - y_0)$.

Пример 2. Пусть $n = 4$. Мы имеем несингулярный тригонометрический оператор, существенно зависящий от обоих переменных x, y:

запишем Ψ-функцию в виде

$$\Psi = e^{k\bar z}\frac{u_0k^4+u_1k^3+u_2k^2+u_3k+u_4}{(k^2-a_1^2)(k^2-a_2^2)},\ \mathcal{D}'=(a_1,a_2,-a_1,-a_2)$$

и $\varphi = e^{pz}$. Предположим, что точки пересечения Γ' и Γ'' имеют вид $0,k_1,k_2,-k_1,-k_2$ для Γ' и $0,p_1,p_2,-p_1,-p_2$ для Γ''. Положим

$$p_1 = k_1 \in \mathbb{R},\ p_2 = -k_2 = iK \in i\mathbb{R}. \tag{16}$$

В этом случае антиинволюция $\sigma : k \to -\bar p$ корректно определена на Γ. Для дифференциалов

$$\Omega_1 = \frac{(k^2-a_1^2)(k^2-a_2^2)dk}{(k^2-k_1^2)(k^2-k_2^2)k},$$

$$\Omega_2 = \frac{s(p^2-\bar a_1^2)(p^2-\bar a_2^2)dp}{(p^2-p_1^2)(p^2-p_2^2)p},$$

где s — некоторое число, должно выполняться условие на вычеты

$$\mathrm{Res}_0\Omega_1+\mathrm{Res}_0\Omega_2=0,\ \mathrm{Res}_{\pm k_j}\Omega_1+\mathrm{Res}_{\pm p_j}\Omega_2=0.$$

В точках пересечения имеем

$$\Psi(0)=1, \Psi(k_1)=e^{p_1z}, \Psi(k_2)=e^{p_2z}, \Psi(-k_1)=e^{-p_1z}, \Psi(-k_2)=e^{-p_2z}.$$

Откуда

$$\begin{gathered}
u_4 = a_1^2a_2^2,\\
u_0k_1^4+u_1k_1^3+u_2k_1^2+u_3k_1 = -a_1^2a_2^2+(k_1^2-a_1^2)(k_1^2-a_2^2)e^{p_1z-k_1\bar z},\\
u_0k_2^4+u_1k_2^3+u_2k_2^2+u_3k_2 = -a_1^2a_2^2+(k_2^2-a_1^2)(k_2^2-a_2^2)e^{p_2z-k_2\bar z},\\
u_0k_1^4-u_1k_1^3+u_2k_1^2-u_3k_1 = -a_1^2a_2^2+(k_1^2-a_1^2)(k_1^2-a_2^2)e^{-p_1z+k_1\bar z},\\
u_0k_2^4-u_1k_2^3+u_2k_2^2-u_3k_2 = -a_1^2a_2^2+(k_2^2-a_1^2)(k_2^2-a_2^2)e^{-p_2z+k_2\bar z}.
\end{gathered}$$

Сложим второе равенство с четвертым, а также третье с пятым

$$2u_0k_1^4+2u_2k_1^2 = -2a_1^2a_2^2+(k_1^2-a_1^2)(k_1^2-a_2^2)2\cos(2k_1y),$$

$$2u_0K^4-2u_2K^2 = -2a_1^2a_2^2+(K^2+a_1^2)(K^2+a_2^2)2\cos(2Kx).$$

Пусть

$$a_1 \in \mathbb{R}, a_2 = ia \in i\mathbb{R}.$$

В этом случае, с учетом (16) и $s = -1$, условия на вычеты дифференциалов Ω_1 и Ω_2 выполнены автоматически. Имеем

$$= u_0 = \frac{a_1^2 a^2}{k_1^2 K^2} \left(1 - A\cos(2k_1 y) - B\cos(2Kx)\right),$$

где

$$A = \frac{(k_1^2 - a_1^2)(k_1^2 + a^2)}{k_1^2(k_1^2 + K^2)}, \ B = \frac{(K^2 + a_1^2)(K^2 - a^2)}{K^2(k_1^2 + K^2)}.$$

При $K = 10, \ k_1 = 5, a_1 = 2, \ a = 1$ получаем

$$A = \frac{546}{3125}, \ B = \frac{2574}{3125}, \ A + B = \frac{624}{625},$$

следовательно, магнитное поле гладко и периодично.

Пример 3. Чисто экспоненциальный потенциал, обе переменных входят в $B = -(\Delta \ln c)/2$, но $\sqrt{c}$ растет, а $\frac{1}{\sqrt{c}}$ ограничено в $\mathbb{R}^2$. Многие $e^W/\sqrt{c}$ также ограничены (для любой "малой" линейной формы $W = \varepsilon(ax + by), \varepsilon \to 0$), если $1/c$ убывает экспоненциально во всех направлениях.

Пусть $n = 2$ (возьмем $c = 1 + e^y$ следуя Примеру 1 выше). Многоугольник T, как указано выше, в этом случае совпадает с отрезком.

$$\mathbb{R}^2 = (\alpha, \beta)$$
$$W_j = \alpha_j x + \beta_j y$$

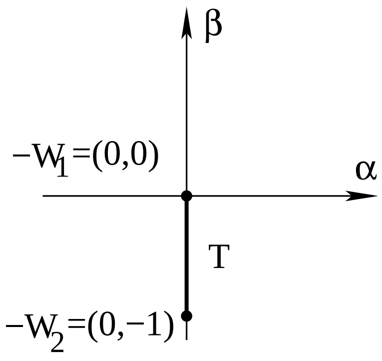


Рис 3

Рассмотрим два примера индикатрис роста в данном классе. Выбирая $W = e^{-y/2}$, $c = e^{y/2} + c^{-y/2}$ получаем, что $I_{W_j}(\varphi) = 0$ ровно в двух точках. Если же положить $W = e^{(x-y)/2}$, $c = e^{(x+y)/2} + c^{(x-y)/2}$, то $I_{W_j}(\varphi) = 0$ на целом отрезке

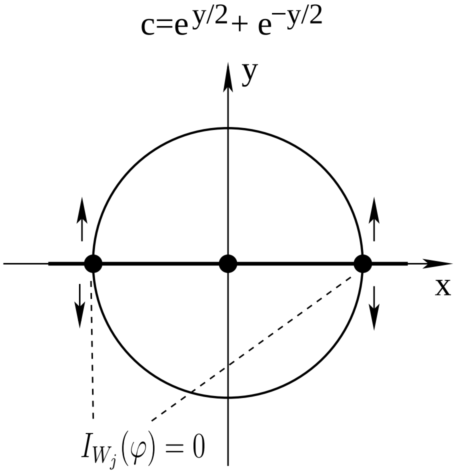


Рис 4 a.

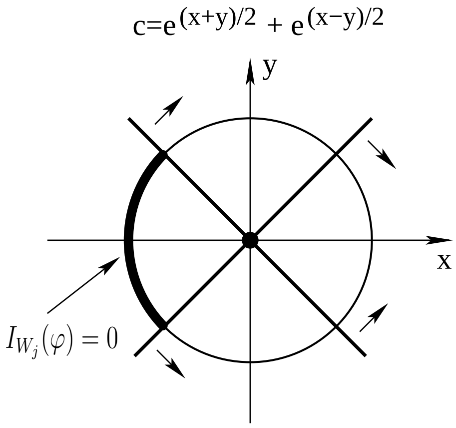


Рис 4 b.

(направления роста W_j показаны стрелками; каждый луч из [0] попадает хотя бы в один сектор роста для c.)

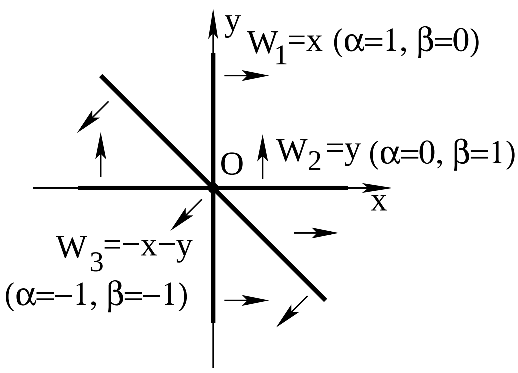
Пусть $n = 3$,

$$c = e^{W_1} + e^{W_2} + e^{W_3} = e^x + e^y + e^{-x-y}$$

a) $\mathbb{R}^2 = (x, y)$

b) $\mathbb{R}^2 = (\alpha, \beta)$

$W_j = \alpha_j x + \beta_j y$



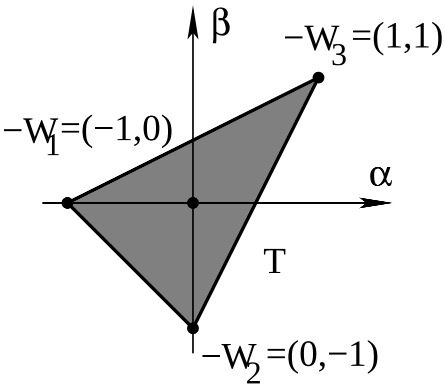


Рис 5 a. Рис 5 b.

В данном примере функция $\frac{1}{c'} = \frac{1}{e^W c}$ ограничена если и только если $W \in T$ где T – внутренность треугольника с вершинами $(-W_1, -W_2, -W_3) \subset \mathbb{R}^2$.

Опишем все несингулярные случаи для экспоненциальных c:

Определение. Пусть $W = \alpha x + \beta y$ — вещественная линейная форма. Мы назовем **"Индикатрисой роста"** $I_W(\varphi)$ для линейной формы $W = \alpha x + \beta y$ функцию на окружности $I_W \geq 0$, $I_W(\varphi) = \max(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi, 0)$. Для набора вещественных линейных форм $\{W_j\}$ мы назовем **"Индикатрисой роста"** функцию $I_{\{W_j\}}(\varphi) = \max\limits_j(I_{W_j}) \geq 0$.

I. Рассмотрим первоначально случай

$$c_{\mathrm{I}} = \sum_j e^{W_j}\kappa_j,\ \kappa_j > 0 \text{ или } c_{\mathrm{II}} = \sum_j e^{W_j}\kappa_j,\ \kappa_j < 0.$$

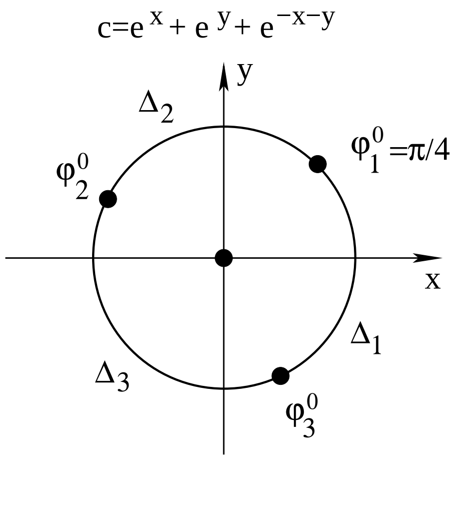
Заметим. что индикатрисы роста различны для наборов $\{W_j\}$ и $\{W_j + W\}$! Это – инвариант функции c.

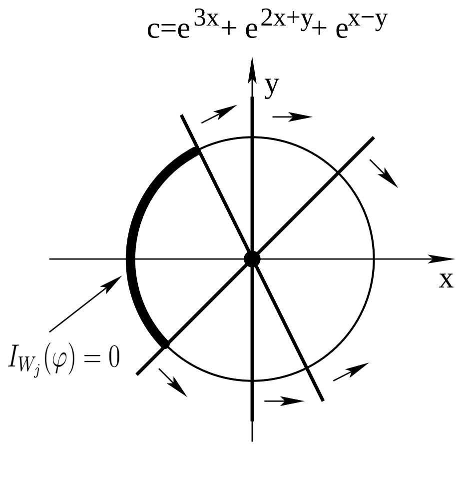
Имеются следующие возможности:

1. $I_{\{W_j\}}(\varphi) > 0$ для всех φ (см Рис. 6 a).

2. $I_{\{W_j\}}(\varphi) = 0$ на целом отрезке по углам φ (см Рис. 6 b).

3. $I_{\{W_j\}}(\varphi) = 0$ в изолированных точках $\varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi_s$. Тогда $s = 1$ (соответсвует граничным точкам треугольника T) или $s = 2$ (см. Рис. 4 a к Примеру 2).





$$\begin{array}{c} \cos(\varphi_1^0) = \sin(\varphi_1^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\varphi_2^0) + 2\sin(\varphi_2^0) = 0 \\ 2\cos(\varphi_3^0) + \sin(\varphi_3^0) = 0 \\ I_{\{W_j\}}(\varphi) > 0 \end{array}$$

Рис 6 a.

Зоны положительности для

$$I_{\{W_j\}}(\varphi): \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -2x \\ y \leq x \end{cases}$$

Рис 6 b.

Мы выбираем в классе $\{ce^W\}$ представителя с наименьшим множеством нулей индикатрисы роста $W_j \to W_j + W = W_j'$ для $c' = e^W c$. Возможность 3 с двумя противоположными нулями $I_{W_j}(\varphi_1) = I_{W_j}(\varphi+\pi)$ реализуется для $c = e^{W_1} + e^{-W_1}$. Ее нельзя свести к случаю 1. Если $s = 1$, то выбирая W можно добиться сведения к $I_{W_j+W}(\varphi) > 0$. Этот случай мы назовем "стабильным", а реализацию $\{W_j\}$ с изолированным нулем $I_{W_j}(\varphi_1) = 0$ — "граничной". Легко видеть, что в стабильном случае функция $c > 0$ растет во всех направлениях, а c^{-1} экспоненциально убывает во всех направлениях.

Пусть $c_0 \in \{ce^W\}$ выбрана стабильной. Функция $c_0^{-1/2}$ является основным состоянием для L_- и $L^P = L_+ \oplus L_-$. Все стабильные функции c_W из класса $\{c_0 e^W\}$ определяют основные состояния вида $W = \alpha x + \beta y$

$$\Psi_W = \frac{e^{-i(\alpha y - \beta x)/2}}{\sqrt{c_0} e^{(\alpha x + \beta y)/2}} = \frac{e^{-i(\alpha y - \beta x)/2}}{\sqrt{c_W}}.$$

Вывод. Оператор L_- имеет семейство основных состояний Ψ_W, занумерованных такими $W = \alpha x + \beta y$, что набор $\{W_j + W\}$ имеет строго положительную индикатрису роста $I_{W_j+W} > 0$ всюду на окружности направлений роста. Это ограничение даёт область T зависящую от W на плоскости $\mathbb{R}^2$ по (α, β). Она является **выпуклым многоугольником** T на плоскости. Внутри T основное состояние Ψ_W принадлежит $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$, $W \in \mathrm{Int}\ \mathrm{T}$, на границе T состояния Ψ_W не принадлежат $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$, и являются тем самым дном непрерывного спектра оператора L_-, $L^P = L_+ \oplus L_-$. По-видимому, для сектора L_+ нижний уровень строго **больше нуля.**

Во всех состояниях Ψ_n для L_- кроме c_0, имеется ненулевой ток J_W определяющейся фазой комплексной функции ψ_W. Вектора J_W тока пробегают выпуклый многоугольник.

Важный факт Интеграл от магнитного поля по плоскости расходится:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} Bdxdy = -\frac{1}{2}R\cdot\oint\limits_0^{2\pi} I_{\{W_j\}}(\varphi)d\varphi + o(R),\ \text{при } R\to\infty,$$

где $I_{\{W\}}$ – индикатриса роста (см. Аппендикс).

II. Для общего потенциала вида:

$$c = \sum_j \kappa_j e^{W_j} + \sum_q e^{W_{R,q}}(\kappa'_q\cos W_{I,q} + \kappa''_q\sin W_{I,q})$$

мы определяем индикатрису роста по вещественному положительному поднабору $\{W_j\}_+$, где $\kappa_j > 0$. (Возможно надо изменить знак $c\to -c$, если поднабор $\{W\}_-$ имеет большую область T^- чем T^+. Надо, чтобы эта область поглощала $(-W_j)$ для всех оставшихся индексов $j\in\{W_j\}$. Для несингулярности магнитного поля на бесконечности $x^2+y^2\to\infty$ необходимо, чтобы индикатриса роста всего набора $\{W_s, W_{R,q}\}$, $s\ne j$ совпадала с индикатрисой $I_{\{W_j\}+} > 0$. При этом условии уже найдутся коэффициенты κ_j при оставшихся вещественных (W_j), а также при смешанных экспонентах κ'_q, κ''_q, такие, что $c\ne 0$. **Если оставшиеся коэффициенты $\kappa_j, \kappa_q = \kappa'_q + i\kappa''_q$ любые, то возможно возникновения нулей c (полюсов c^{-1}) на границе ограниченной области $D\subset\mathbb{R}^2(x,y)$. Магнитное поле $B = -(\Delta\ln c)/2$ также имеет полюса на границе ∂D.**

2.2 Случай g=1. Операторы с феноменом Бома–Ааронова и магнитно-блоховские функции

В этом параграфе мы рассмотрим случай эллиптических кривых (т.е. рода $g=1$). Как мы увидим ниже, здесь появятся интересные феномены, объединяюшие эту работу со случаем [2, 3, 4] ненулевого магнитного потока (см. также [6, 7, 8, 9, 10] по поводу магнитных трансляций и топологии).

Пусть

$$\Gamma' = \Gamma'' = \mathbb{C}/\Lambda,$$

где

$$\Lambda = \{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,\ m_1, m_2\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{C}$$

некоторая решетка. Мы будем предполагать, что $\omega_1 = 1$ и что решетка инвариантна относительно сопряжения

$$\bar{\Lambda} = \Lambda$$

(это выполнено, например, когда ω_2 чисто мнимая величина).

Положим $\infty_1 = 0 \in \Gamma'$, $\infty_2 = 0 \in \Gamma''$. Пусть $Q_0, \dots, Q_n \in \Gamma'$ и $R_0, \dots, R_n \in \Gamma''$ отвечают точкам пересечения $\Gamma' \cap \Gamma''$.

Выразим ψ-функцию через σ и ζ - функции Вейерштрасса.

Напомним, что $\zeta(w)$ — мероморфная функция на $\mathbb{C}$ с полюсами первого порядка в точках решетки Λ, причем

$$\zeta(w + 2\omega_s) = \zeta(w) + 2\eta_s, \tag{1}$$

где $\eta_s = \zeta(\omega_s)$. Из инвариантности решетки при сопряжении вытекает

$$\zeta(w) = \overline{\zeta(\bar{w})}.$$

Функция $\sigma(w)$ — аналитическая функция на $\mathbb{C}$ с простыми нулями в точках решетки Λ, причем

$$\sigma(w + 2\omega_s) = -e^{2\eta_s(w+\omega_s)}\sigma(w),$$

$$\sigma(w - 2\omega_s) = -e^{-2\eta_s(w-\omega_s)}\sigma(w).$$

Из инвариантности решетки при сопряжении также вытекает

$$\sigma(w) = \overline{\sigma(\bar{w})}.$$

Функция $\psi'' = \psi|_{\Gamma''}$ имеет вид $(z, \bar{z} \in \mathbb{C}, p \in \Gamma'', P = D'')$

$$e^{-z\zeta(p)} \frac{\sigma(p + z + P)}{\sigma(z + P)\sigma(p + P)}.$$

Функцию $\psi' = \psi|_{\Gamma'}$ будем искать в виде

$$e^{-\bar{z}\zeta(k)} \left(\frac{\sigma(k + \bar{z} + A_0)\sigma(k - Q_1)\dots\sigma(k - Q_n)}{\sigma(k + P_1)\dots\sigma(k + P_{n+1})}\, f_0(z, \bar{z}) + \dots + \right.$$

$$\left. \frac{\sigma(k + \bar{z} + A_n)\sigma(k - Q_0)\dots\sigma(k - Q_{n-1})}{\sigma(k + P_1)\dots\sigma(k + P_{n+1})} f_n(z, \bar{z}) \right),$$

где

$$A_0 = Q_1 + \cdots + Q_n + P_1 + \cdots + P_{n+1},$$
$$A_1 = Q_0 + Q_2 + \cdots + Q_n + P_1 + \cdots + P_{n+1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_n = Q_0 + \cdots + Q_{n-1} + P_1 + \cdots + P_{n+1},\ D' = P_1 + \cdots + P_{n+1}.$$

Из условия согласованности

$$\psi'(Q_s) = \psi''(R_s)$$

получаем

$$e^{-\bar{z}\zeta(Q_0)} \frac{\sigma(Q_0 + \bar{z} + A_0)\sigma(Q_0 - Q_1)\dots\sigma(Q_0 - Q_n)}{\sigma(Q_0 + P_1)\dots\sigma(Q_0 + P_{n+1})} f_0(z, \bar{z}) =$$
$$e^{-z\zeta(R_0)} \frac{\sigma(R_0 + z + P)}{\sigma(z + P)\sigma(R_0 + P)},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$e^{-\bar{z}\zeta(Q_n)} \frac{\sigma(Q_n + \bar{z} + A_n)\sigma(Q_n - Q_0)\dots\sigma(Q_n - Q_{n-1})}{\sigma(Q_n + P_1)\dots\sigma(Q_n + P_{n+1})} f_n(z, \bar{z}) =$$
$$e^{-z\zeta(R_n)} \frac{\sigma(R_n + z + P)}{\sigma(z + P)\sigma(R_n + P)},$$

откуда находим $f_s(z, \bar{z})$:

$$f_0 = e^{-z\zeta(R_0) + \bar{z}\zeta(Q_0)} \frac{\sigma(R_0 + z + P)}{\sigma(\bar{z} + Q_0 + \cdots + Q_n + P_1 + \cdots + P_{n+1})\sigma(z + P)} S_0,$$
$$S_0 = \frac{\sigma(Q_0 + P_1)\dots\sigma(Q_0 + P_{n+1})}{\sigma(R_0 + P)\sigma(Q_0 - Q_1)\dots\sigma(Q_0 - Q_n)},$$
$$\dots$$
$$f_n = e^{-z\zeta(R_n) + \bar{z}\zeta(Q_n)} \frac{\sigma(R_n + z + P)}{\sigma(\bar{z} + Q_0 + \cdots + Q_n + P_1 + \cdots + P_{n+1})\sigma(z + P)} S_n,$$
$$S_n = \frac{\sigma(Q_n + P_1)\dots\sigma(Q_n + P_{n+1})}{\sigma(R_n + P)\sigma(Q_n - Q_0)\dots\sigma(Q_n - Q_{n-1})}.$$

Имеем

$$c(z, \bar{z}) = \left(\frac{\sigma(\bar{z} + A_0)\sigma(-Q_1)\dots\sigma(-Q_n)}{\sigma(P_1)\dots\sigma(P_{n+1})}\ f_0(z, \bar{z}) + \cdots + \right.$$

$$\frac{\sigma(\bar z + A_n)\sigma(-Q_0)\dots\sigma(-Q_{n-1})}{\sigma(P_1)\dots\sigma(P_{k+1})} f_n(z,\bar z)\Bigg).$$

Отметим, что у всех f_s в знаменателе стоит один и тот же множитель

$$\sigma'\sigma'' = \sigma(\bar z + Q_0 + \dots + Q_n + P_1 + \dots + P_{n+1})\sigma(z+P).$$

Умножив все функции на этот множитель $\sigma'\sigma''$, мы имеем возможность найти положительные вещественные функции $\tilde c = c\sigma(\bar z + Q + D')\sigma(z+D'')$ и соответствующие функции $\tilde\Psi = \Psi\sigma(\bar z + Q + D')\sigma(z + D'')$. Функции $\tilde\Psi$ не являются уже обычными функциями Блоха–Флоке. Кем же они являются? Это мы увидим ниже.

Найдем данные для периодических гладких вещественных магнитных полей $\tilde B = -(\Delta \ln \tilde c)/2$ при $\mathbf{n = 1}$ (две точки пересечения).

Имеем

$$\tilde c =$$
$$e^{\bar z\zeta(Q_1) - z\zeta(R_1)} \frac{\sigma(Q_0)\sigma(P_1+Q_1)\sigma(P_2+Q_1)\sigma(P+R_1+z)\sigma(P_1+P_2+Q_0+\bar z)}{\sigma(P+R_1)} -$$
$$e^{\bar z\zeta(Q_0) - z\zeta(R_0)} \frac{\sigma(Q_1)\sigma(P_1+Q_0)\sigma(P_2+Q_0)\sigma(P+R_0+z)\sigma(P_1+P_2+Q_1+\bar z)}{\sigma(P+R_0)},$$

$\tilde B = -(\Delta \ln \tilde c)/2.$

Положим

$$Q_1 = -Q_0,\ R_0 = -Q_0,\ R_1 = Q_0,$$
$$P = P_1 + P_2,\ P_1, P_2 \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\tilde c = e^{-\bar z\zeta(Q_0) - z\zeta(Q_0)} \frac{\sigma(P_1 - Q_0)\sigma(P_2 - Q_0)\sigma(P + Q_0 + z)\sigma(P + Q_0 + \bar z)}{\sigma(P_1 + P_2 + Q_0)} +$$
$$e^{\bar z\zeta(Q_0) + z\zeta(Q_0)} \frac{\sigma(P_1 + Q_0)\sigma(P_2 + Q_0)\sigma(P - Q_0 + z)\sigma(P - Q_0 + \bar z)}{\sigma(P_1 + P_2 - Q_0)} =$$
$$e^{-2x\zeta(Q_0)} \frac{\sigma(P_1 - Q_0)\sigma(P_2 - Q_0)|\sigma(P + Q_0 + z)|^2}{\sigma(P_1 + P_2 + Q_0)} +$$
$$e^{2x\zeta(Q_0)} \frac{\sigma(P_1 + Q_0)\sigma(P_2 + Q_0)|\sigma(P - Q_0 + z)|^2}{\sigma(P_1 + P_2 - Q_0)},$$
$$\tilde B = -(\Delta \ln \tilde c)/2.$$

Выберем P_1, P_2 так, чтобы величины

$$A_1 = \frac{\sigma(P_1 - Q_0)\sigma(P_2 - Q_0)}{\sigma(P_1 + P_2 + Q_0)}$$

и

$$A_2 = \frac{\sigma(P_1 + Q_0)\sigma(P_2 + Q_0)}{\sigma(P_1 + P_2 - Q_0)},$$

имели один знак, получим

$$\tilde{c} \neq 0.$$

Отметим, что условие на вычеты для дифференциалов

$$\Omega_1 = \frac{\sigma(k + P_1)\sigma(k + P_2)\sigma(k - P)}{\sigma(k - Q_0)\sigma(k - Q_1)\sigma(k)} dk,$$

$$\Omega_2 = -\frac{\sigma(p + P_1)\sigma(p + P_2)\sigma(p - P)}{\sigma(p - Q_0)\sigma(p - Q_1)\sigma(p)} dp$$

выполнено автоматически.

Пусть $\omega_1 \in \mathbb{R}, \omega_2 = i\tau \in i\mathbb{R}$. Имеем

$$\tilde{c}(x, y + 2\tau) = e^{-2x\zeta(Q_0)} A_1 \sigma(P + Q_0 + z + 2\omega_2)\sigma(P + Q_0 + \bar{z} - 2\omega_2) +$$
$$e^{2x\zeta(Q_0)} A_2 \sigma(P - Q_0 + z + 2\omega_2)\sigma(P - Q_0 + \bar{z} - 2\omega_2) =$$
$$e^{-2x\zeta(Q_0)} A_1 e^{2\eta_2(P + Q_0 + z + \omega_2)}\sigma(P + Q_0 + z) e^{-2\eta_2(P + Q_0 + \bar{z} - \omega_2)}\sigma(P + Q_0 + \bar{z}) +$$
$$e^{2x\zeta(Q_0)} A_2 e^{2\eta_2(P - Q_0 + z + \omega_2)}\sigma(P - Q_0 + z) e^{-2\eta_2(P - Q_0 + \bar{z} - \omega_2)}\sigma(P - Q_0 + \bar{z}) =$$
$$e^{-2x\zeta(Q_0)} A_1 \sigma(P + Q_0 + z)\sigma(P + Q_0 + \bar{z}) e^{2\eta_2(z - \bar{z} + 2\omega_2)} +$$
$$e^{2x\zeta(Q_0)} A_2 \sigma(P - Q_0 + z)\sigma(P - Q_0 + \bar{z}) e^{2\eta_2(z - \bar{z} + 2\omega_2)} =$$
$$\hat{c}(x, y) e^{2\eta_2(z - \bar{z} + 2\omega_2)},$$

$$\tilde{c}(x + 2\omega_1, y) = e^{-2x\zeta(Q_0) - 4\omega_1\zeta(Q_0)} A_1 \sigma(P + Q_0 + z + 2\omega_1)\sigma(P + Q_0 + \bar{z} + 2\omega_1) +$$
$$e^{2x\zeta(Q_0) + 4\omega_1\zeta(Q_0)} A_2 \sigma(P - Q_0 + z + 2\omega_1)\sigma(P - Q_0 + \bar{z} + 2\omega_1) =$$
$$= e^{-2x\zeta(Q_0) - 4\omega_1\zeta(Q_0)} A_1 e^{2\eta_1(P + Q_0 + z + \omega_1)}\sigma(P + Q_0 + z) e^{2\eta_1(P + Q_0 + \bar{z} + \omega_1)}\sigma(P + Q_0 + \bar{z}) +$$
$$e^{2x\zeta(Q_0) + 4\omega_1\zeta(Q_0)} A_2 e^{2\eta_1(P - Q_0 + z + \omega_1)}\sigma(P - Q_0 + z) e^{2\eta_2(P - Q_0 + \bar{z} + \omega_1)}\sigma(P - Q_0 + \bar{z}).$$

Пусть Q_0 — решение уравнения

$$\omega_1\zeta(Q_0) = \eta_1 Q_0$$

(существование следует из нечетности ζ). Тогда

$$\hat{c}(x+2\omega_1, y) = \hat{c}(x,y)e^{2\eta_1(2P+z+\bar{z}+2\omega_1)}.$$

Следовательно, магнитное поле $\tilde{B} = -(\Delta\ln\tilde{c})/2$ периодично.

Заметим следующее: $\Delta\ln(\sigma'\sigma'') = 2\pi\delta_{Q+D'} + 2\pi\delta_{D''}$ локально имеет вид периодической суммы двух δ-функций с весом 2π, так как $\sigma' = \sigma(\bar{z}+u), \sigma'' = \sigma(z+v)$. При этом, если $u = v = 0$, мы имеем локально около $z = 0 : \ln(\sigma\bar{\sigma}) \sim \ln(|z|^2)$, $\Delta(\ln|z|^2) = 4\pi\delta(x)\delta(y)$, так что $\Delta(\ln\sigma')$ и $\Delta(\ln\sigma'')$ имеют знак $+$.

Утверждение: Магнитный поток гладкого периодического поля $\tilde{B}$ сквозь элементарную ячейку $\Box$ равен -2π (одному кванту магнитного потока).

Это следует из того, что для "алгеброгеометрического" поля B, для которого определены обычные функции Блоха–Флоке, поток сквозь $\Box$ равен 0, по определению. Мы вычли поток -2π, умножая на $\sigma'\sigma'' = |\sigma(z+P)|^2$. Из поля B в пределах элементарной ячейки $\Box$ мы вычли две δ-функции $\tilde{B} = B - \pi\delta_{Q+D'} - \pi\delta_{D''}$ (при этом $D'' = Q + D'$ в нашем примере для $n = 1$). После этого мы получили поток 0, для B. Отсюда вытекает, что полный поток для $\int\int_{\Box}\tilde{B}dxdy = -2\pi$.

Сопоставление с базисами Дубровина–Новикова [3, 4] для ненулевых потоков.

Наша функция $\tilde{\Psi}$, собственная для оператора L^P с магнитныи полем $\tilde{B}$, является магнитным аналогом блоховских функций. Такое семейство, занумерованное точками точками тора $T^2 = \Gamma'$, магнитно-блоховских функций было построено для всех ненулевых целых значений магнитного потока периодического поля $B(x,y)$ в работе [3, 4]. Все это семейство обслуживает гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$. Они выражаются через эллиптические σ-полиномы от z ($\bar{z}$ не входит в формулы [3, 4]). Тем не менее можно изменить нормировку и базис для сингулярных "алгеброгеометрических полей" рода $g = 1$, найденых в этой работе, и получить все функции из [3, 4] для $\varepsilon_0 = 0$, причем весь набор изоморфен "уровню Ландау".

Сингулярное магнитное поле B δ-образной сингулярностью, является алгеброгеометрической реализацией операторов с феноменом Бома–Ааронова (Bohm–Aharonov), где вычислено комплексное многообразие блоховских решений оператора $L^P\Psi = 0$. Из них гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$ могут обслуживать лишь величины типа $c^{-1/2}$, если $\tilde{c}$ не имеет нулей. В нашем примере для $n = 1$ мы имеем:

$$c = |\sigma(z+P)|^{-2}\tilde{c}$$
$$B = \tilde{B} + 2\pi\delta(z+P), P = P_1 + P_2.$$

Итак, c имеет полюс втрого порядка при $z + P = 0$ (периодически повторяющийся).

Следовательно, величина $(c^{-1/2})$ имеет нуль при $z + P = 0$. Она положительна всюду вне нуля. **Это основное состояние для периодического оператора с феноменом Бома-Ааронова и суммарным потоком, равным 0.**

В гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$ это состояние является дном непрерывного спектра. Мы нашли также все комплексные функции Блоха-Флоке для $\varepsilon_0 = 0$. Это семейство, оказывается, соответствует уровню Ландау с потоком, равным одному кванту, как указано выше. Оно зависит от одного параметра k.

Подробное сопоставление нашего базиса с базисом Дубровина–Новикова магнитно-блоховских функций [3, 4] будет произведено в следующей работе.

3 Приложение: Асимптотика магнитного потока

Вычислим асимптотику магнитного потока через шар радиуса R в чисто экспоненциальном случае

$$e^{2\Phi} = c = \sum_j \kappa_j e^{W_j}, \kappa_j > 0, W_j = R(\alpha_j \cos(\phi) + \beta_j \sin(\phi))$$

Магнитное поле имеет вид $B = -(\Delta(\ln c))/2$. Вектор-потенциал, ограниченный на окружность радиуса $r = R$, в полярных координатах имеет вид

$$A = \Phi_y dx - \Phi_x dy = -\frac{1}{2}R[\sum_j \kappa_j e^{W_j}(\alpha_j \cos(\phi) + b_j \sin(\phi))]d\phi/c.$$

Наше предположение заключается в том, что существует в точности N индексов $j = 1, 2, ..., N$ таких, что индикатриса нашего семейства $I_{\{W_j\}}(\phi) = max_j I_{W_j}(\phi)$, где $I_{W_j} = max[\alpha_j \cos(\phi) + \beta_j \sin(\phi), 0]$, является строго положительной и все остальные индексы $p \neq 1, 2, ...N$ несущественны (т.е. соответствующие линейные формы W_p расположены строго внутри выпуклой области $T \subset R^2$ с координатами α, β нумерующими быстро убывающие векторы основных состояний нашего оператора). Существуют области Δ_j на окружности S^1, где $I_{\{W_k\}} = I_{W_j}(\phi)$ с концевыми точками $\Delta_j = [\phi_j^0, \phi_{j-1}^0]$ и $\phi_0^0 = \phi_N^0$ для $j = N, 1$. Таким образом Δ_N граничит с Δ_{N-1} и Δ_1 (т.е. наша нумерация является циклической против часовой стрелки).

Наше утверждение заключается в следующем:

Справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\int\int_{D_R^2} B(x,y)dxdy + \frac{1}{2}R\oint_{S^1} I_{\{W_k\}}(\phi)d\phi =$$

$$= \sum_{s\geq 1} R^{-s} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{(s)} \{Q_s(a_j) + Q_s(a_j^{-1})(-1)^s\} + (\text{остаточный член}).$$

Этот ряд является, по-видимому, расходящимся, поскольку коэффициенты Q_s растут, как нам кажется, как $s!$. Об остаточном члене мы утверждаем, что он убывает быстрее любой отрицательной степени R. Мы утверждаем, что **"регуляризованный поток"**

$$\int\int_{D_R^2} Bdxdy + \frac{1}{2}R\oint_{S_R^1} I_{\{W_j\}}(\phi)d\phi = O\left(\frac{1}{R}\right)$$

стремится к нулю в этой сумме, при $R \to \infty$. Проделывая эти вычисления в окрестности критической точки ϕ_j^0, мы используем следующую функцию

$$(W_{j+1} - W_j)/R = (\alpha_{j+1} - \alpha_k)\cos(\phi) + (\beta_{j+1} - \beta_j)\sin(\phi) = t_j(z).$$

Здесь $\phi = (\phi_j^0 + z), |z| < \epsilon$, локализована в точках ϕ_j^0 или $z = 0$: в этих точках $W_j = W_{j+1}, t_j = 0, z = 0$, и обратная функция $z(t_j))$ задана обратным рядом с конечным радиусом сходимости:

$$z = \sum_{k\geq 1} \lambda_j^{(k)} t_j^{k+1}/(k+1)$$

$$d\phi = dz = \sum_{k\geq 0} \lambda_j^{(k)} t_j^k dt_j$$

Определим числа

$$Q_k(a) = \int_0^\infty [aw^k e^{-w}/(1+ae^{-w})]dw$$

полезные для исследования разности

$$\oint_{S_R^1} A + \frac{1}{2} R \oint_{S^1} I_{\{W_q\}}(\phi) d\phi.$$

Вероятно, $Q_k \sim k!$. Наша функция c имеет везде экспоненциальный рост, но магнитное поле затухает только вне малых областей содержащих "критические" точки ϕ_j^0. Легко видеть, что вектор-потенциал A после удаления индикатрисы роста $RI_{\{W_q\}}(\phi)(d\phi)$, становится экспоненциально малым вне этих малых областей. Только два экспоненциальных члена $\kappa_j e^{W_j}, \kappa_{j+1} e^{W_{j+1}}$ в c существенны в каждой такой области между Δ_j и Δ_{j+1}. Отбрасывание всех остальных членов в суммах для $c = \sum_q \kappa_q e^{W_q}$ и для A в каждой такой маленькой области имеет экспоненциально малое влияние. В области $\phi \in \Delta_q$ умножим оба — числитель и знаменатель в выражении для A на экспоненту $\kappa_q^{-1} e^{-W_q}$. Экспонента e^{-W_j} является вершиной выпуклого многоугольника T, содержащего все функции $c' = ce^W \in T$ такие, что $(ce^{W_q})^{-1/2}$ порождают основные состояния оператора Паули. Нам нужно $q = j$ для $\phi \leq \phi_j^0$ (или $\phi \in \Delta_j$) и $q = j+1$ для $\phi \in \Delta_{j+1}$. Таким образом только два члена остаются в числителе и знаменателе.

Аналогичный результат мы получаем в области Δ_j, ниже точка ϕ_j^0, с константой κ_{j+1}/κ_j и экспонентой $e^{\{W_{j+1}-W_j\}}$; кроме того, мы должны обратить направление интегрирования. Беря ϵ так, что $R\epsilon = O(R^\delta), \delta > 0$, мы видим следующее: интегрирование между пределами $[\phi_j^0 - \epsilon, \phi_j^0 + \epsilon]$ таких выражений, где $w = Rt_j$, которые появляются в наших вычислениях регуляризованного магнитного потока, могут быть расширены до пределов $[-\infty, +\infty]$. Это верно, поскольку остаточный член имеет порядок $O(e^{-R^\delta})$: более точно он затухает быстрее чем любой полином. Выражая переменную $z = \phi - \phi_j^0$ через переменную $t_j = (W_j - W_{j+1})/R$, мы легко приходим к нашему результату. В последнем интегрировании мы имеем сумму интегралов вида

$$Q_s(a) = R^{-s-1} \int_0^\infty ae^{-w}/(1+ae^{-w}) w^s dw,$$

где $w = \pm Rt_j$. Берется знак $+$ и $a = \kappa_{j+1}/\kappa_j$ при $z \leq 0$, и знак $-$ и a заменяется на a^{-1} при $z \geq 0$. Мы приходим к нашему результату.

Заметим, что для выражений вида

$$Q'_k = \int_0^\infty e^{-w} w^k dw$$

легко показать, что они растут как $(k!)$. Вероятно, это верно и для наших выражений Q_k.

References

[1] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М., Теретическая физика Т.4: Берестецкий В.Б., Лившиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М:Наука 1980.

[2] Aharonov Y., Casher A., *Phys. Rev. A* 19:6 (1979), 2461.

[3] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Основные состояния двумерного электрона в периодическом поле. *ЖЭТФ*, 1980, Т. 79, №3. - С. 1006-1016; этот текст можно скачать с персональной страницы С.П.Новикова по ссылке: http://www.mi.ras.ru/~snovikov/64.pdf.

[4] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Основные состояния в периодическом поле. Магнито-блоховские функции и векторные расслоения. *ДАН СССР*, 1980, Т. 253, №6, С. 1293-1297; этот текст можно скачать с персональной страницы С.П.Новикова по ссылке: http://www.mi.ras.ru/~snovikov/65.pdf.

[5] Avron J. E., Seiler R., Paramagnetism for nonrelativistic electrons and Euclidean massless Dirac particles, *Phys. Rev. Lett.*, 1979, V. 42, №. 15, pp. 931–934.

[6] Новиков С.П., Типичные законы дисперсии и их квантовые числа. Магнитно-блоховские функции и векторныне расслоения *ДАН СССР*, 1981. т. 257, №3. с. 538—543; этот текст можно скачать с персональной страницы С.П.Новикова по ссылке: http://www.mi.ras.ru/~snovikov/71.pdf.

[7] Novikov S.P., Two-dimensional Schroedinger operators in periodic fields. *Journal of Mathematical Sciences*, 1985, V. 28, No 1, pp. 1-20; этот текст можно скачать с персональной страницы С.П.Новикова по ссылке: http://www.mi.ras.ru/˜snovikov/81.pdf.

[8] Лыскова А.С., Об операторе Шрёдингера в магнитном поле. *УМН*, 1981, 36:2(218), 189–190.

[9] Лыскова А.С., Топологические свойства оператора Шрёдингера в магнитном поле и слабом потенциале. *УМН*, 1981, 36:5(221), 181-182.

[10] Zak J., Magnetic translation groups, *Phys. Rev. A*, 1964, V. 134, No. 6, pp. 1602-1612.

[11] Novikov S.P., Veselov A.P. Exactly solvable 2-dimensional Schroedinger opeators and Laplace Transformations, *AMS Translations* (1997), ser 2, vol 179 - Solitons, Geometry and Topology: On the Crossroads, pp 109-132; http://www.arxiv.org/abs/math-ph/0003008.

[12] P.Grinevich, A.Mironov, S.Novikov, New Reductions and Nonlinear Systems for 2D Schrodinger Operators. arXiv:1001.4300

[13] Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П. Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности. *ДАН СССР*, 1976, Т. 229, № 1, С. 15-18; этот текст можно скачать с персональной страницы С.П.Новикова по ссылке: http://www.mi.ras.ru/˜snovikov/49.pdf.

[14] Веселов А.П., Новиков С.П., Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения, *ДАН СССР*, 1984, Т. 279, № 1, С. 20-24; этот текст можно скачать с персональной страницы С.П.Новикова по ссылке: http://www.mi.ras.ru/˜snovikov/90.pdf.

[15] Веселов А.П., Новиков С.П., Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы *ДАН СССР*, 1984, Т. 279, № 4.— С. 784—788; этот текст можно скачать с персональной страницы С.П.Новикова по ссылке: http://www.mi.ras.ru/˜snovikov/91.pdf.

[16] Дубровин Б.А., Тэта-функции и нелинейные уравнения, *УМН*, 1981, 36:2 , С. 11-80

[17] Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, *УМН*, 1976, 31:1(187), С. 55–136; этот текст можно скачать с персональной страницы С.П.Новикова по ссылке: http://www.mi.ras.ru/˜snovikov/48.pdf.

[18] Чередник И.В. Об условиях вещественности в “конечнозонном” интегрировании, *ДАН СССР* 1980. Т. 252. №. 5. С. 1104-1107.