# Типовые задачи с решениями.

## Гамма-функция

**Пример 1.** *Найти произведение* $\prod\limits_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^3}\right)$.

**Решение.** Прежде всего проведем переиндексацию $k \to k+1$, чтобы произведение начиналось с единицы. В результате получим $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(k+1)^3}\right)$. Далее разложим общий член произведения на линейные множители. Получим

$$1-\frac{1}{(k+1)^3}=\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{k+1}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_2}{k+1}\right),$$

где $\varepsilon_1+\varepsilon_2=1$ и $\varepsilon_1\varepsilon_2=1$ являются комплексными числами. Далее преобразуем все множители к стандартной форме $1+\frac{x}{k}$ в результате получим такую формулу общего члена:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\,\frac{1+\frac{1+\varepsilon_1}{k}}{1+\frac{1}{k}}\,\frac{1+\frac{1+\varepsilon_2}{k}}{1+\frac{1}{k}}$$

Так как $e^{1+\varepsilon_1}e^{1+\varepsilon_2}=e^3$, можем расщепить исходное произведение на три стандартных

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1+\varepsilon_1}{k}\right)e^{-\frac{1+\varepsilon_1}{k}}\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1+\varepsilon_2}{k}\right)e^{-\frac{1+\varepsilon_2}{k}}}{\left(\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k})e^{-\frac{1}{k}}\right)^3}$$

Теперь, мы можем применить формулу

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right\}=\frac{e^{-\gamma x}}{x\Gamma(x)}$$

ко всем трем произведениям и получить такой ответ

$$\left(e^{-3\gamma}\Gamma(1)^3\right)^{-1}\frac{e^{-\gamma(1+\varepsilon_1)}}{(1+\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_1)}\,\frac{e^{-\gamma(1+\varepsilon_2)}}{(1+\varepsilon_2)\Gamma(1+\varepsilon_2)},$$

который сокращается до

$$\frac{1}{3\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_2)}$$

Так как $\varepsilon_1+\varepsilon_2=1$, то применение формул понижения и дополнения позволяют получить

$$\Gamma(1+\varepsilon_1)\Gamma(1+\varepsilon_2)=\varepsilon_1\Gamma(\varepsilon_1)\varepsilon_2\Gamma(\varepsilon_2)=\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon_1}$$

Осталось избавиться от мнимостей в ответе. Пусть $\varepsilon_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ тогда $\sin\pi\varepsilon_1=\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)=\cos\left(i\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)=\operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

В итоге искомое произведение оказывается равным $\frac{\pi}{3\operatorname{ch}\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}$.

□

## Вычеты

Кратностью нуля функции $f(z)$ в точке $z_0$ называется номер первой отличной от нуля производной этой функции в точке $z_0$. Например, кратность нуля $\sin^2 z$ при $z = \pi k$ равна двум, потому что в этих точках в ноль обращаются как $\sin^2 z$, так и его производная $2\sin z \cos z = \sin 2z$, а вторая производная равная $-2\cos 2z$ нулю не равна. (Если $f(z_0) \neq 0$, то кратность нуля в $z_0$ нулевая.)

Вычет функции $f(z)$ в особой точке $z_0$, являющейся полюсом порядка $n$, равен пределу при $\zeta \to z_0$ от $(n-1)$-производной произведения $f(z)(z-z_0)^n$ деленной на $(n-1)!$.

**Пример 2.** *Найти вычет* $\operatorname{ctg} z$ *в нуле.*

**Решение.** В нуле $\sin z$ имеет ноль кратности 1, тогда как $\cos z = 1$. Поэтому $\operatorname{ctg} z$ имеет в нуле простой полюс. Значит

$$\operatorname{res} \operatorname{ctg} 0 = \lim_{z \to 0} z \operatorname{ctg} z = \lim_{z \to 0} \cos z \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z}$$

Последний предел представляет собой неопределенность типа $0/0$ и по правилу Лопиталя равен пределу отношения производных. Откуда

$$\operatorname{res} \operatorname{ctg} 0 = \lim_{z \to 0} \cos z \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = \cos 0 \lim_{z \to 0} \frac{1}{\cos z} = 1$$

□

**Пример 3.** *Найти вычеты функции* $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$ *в ее особых точках.*

**Решение.** Особые точки функции $f(z)$ суть $z = -1$ и $z = 2$. Точка $z = -1$ является полюсом третьего порядка. Поэтому

$$\operatorname{res} f(-1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to -1} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{e^z}{z-2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \frac{(z^2 - 6z + 10)e^z}{(z-2)^3} = -\frac{17}{54e}$$

□

**Пример 4.** *Вычислить интеграл* $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z} dz$.

**Решение.** В области $|z| < 4$ функция $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2+z}$ аналитична всюду, кроме точек $z = 0$ и $z = -1$. По теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i (\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(-1))$$

Вычет $\operatorname{res} f(0) = 0$, потому что существует конечный предел

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = 1$$

и особенность при $z = 0$ кажущаяся (т.е. устранимая). Точка $z = -1$ является полюсом первого порядка

$$\operatorname{res} f(-1) = \lim_{z \to -1} \left\{ \frac{e^z - 1}{z^2 + z}(z+1) \right\} = 1 - e^{-1}$$

Таким образом

$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}dz = 2\pi i(1-e^{-1})$$

$\square$

**Тригонометрические интегралы по периоду.** Интегралы типа $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, dx$, сводятся к контурным интегралам по окружности $|z|=1$ с помощью подстановки $z=e^{ix}$. В этом случае имеем $dz = ie^{ix}dx$, откуда $dx = \frac{dz}{iz}$. А формулы Эйлера для синуса и косинуса дают $\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $\sin x = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$.

**Пример 5.** *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$, $a>b>0$.

**Решение.** Применяя подстановку $e^{ix}=z$ имеем $dx=\frac{dz}{iz}$, $\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ и после простых преобразований получим

$$I = \frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{(bz^2+2az+b)^2} = \frac{4}{i}2\pi i \sum \operatorname{res} F(z)$$

Внутри единичного круга при условии $a>b>0$ находится только один полюс (двукратный)

$$z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

Вычет функции $F(z) = \frac{z}{(bz^2+2az+b)^2}$ в этом полюсе равен

$$\operatorname{res} F(z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\left\{\frac{z(z-z_1)^2}{b(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right\} = \frac{ab}{4}(a^2-b^2)^{-3/2}$$

Итак,

$$I = \frac{2\pi ab}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

$\square$

**Несобственные интегралы от рациональных функций** Интеграл типа $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, где $P(x)$ и $Q(x)$ являются многочленами, так что степень $Q(x)$ превосходит степень $P(x)$ на два или больше, $2\pi i$ умноженному на сумму вычетов особых точек, лежащих в верхней полуплоскости.

**Пример 6.** *Вычислить интеграл*

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\, dx, \qquad a>0$$

**Решение.** Так как подъинтегральная функция $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$ — четная, то

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$, которая на действительной оси совпадает с заданной. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости полюс второго порядка в точке $z = ai$. Ее вычет в этой точке равен

$$\operatorname{res} f(ai) \lim_{z\to ai} \frac{d}{dz}[f(z)(z-ai)^2] = \lim_{z\to ai} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right] = \\ = \lim_{z\to ai} \frac{2aiz}{(z+ai)^3} = \frac{1}{4ai}$$

Так как степень числителя $f(z)$ на два меньше степени знаменателя, то интеграл от $f(z)$ по вещественной прямой равен $2\pi i$ умноженному на вычисленное выше значение вычета $\operatorname{res} f(ai)$. Итак

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{4a}$$

□

**Интегралы вычислимые с леммой Жордана.** В силу леммы Жордана интегралы типа $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}R(x)dx$, где $R(x)$ является правильной дробью (степень числителя меньше степени знаменателя) выражаются формулой

$$2\pi i \sum \chi(\operatorname{Im} z)\operatorname{res} f(z),$$

где $\chi(t)$ — функция Хэвисайда (1 при $t > 0$, $\frac{1}{2}$ при $t = 0$ и 0 при $t < 0$), а сумма берется по всем особым точкам. (то есть вычеты в нижней полуплоскости не считаются, а вычеты на вещественной прямой считаются с половинным весом.)

**Пример 7.** *Вычислить интеграл*

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx, \qquad a > 0, b > 0$$

**Решение.** Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$, мнимая часть которой совпадает на вещественной оси с подинтегральной функцией. Функция $f(z)$ имеет особенность на вещественной оси — полюс первого порядка в точке $z = 0$ и также единственный простой полюс в верхней полуплоскости в точке $z = bi$. Поэтому искомый интеграл равен

$$I = \operatorname{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\,dz = \operatorname{Im}(2\pi i \operatorname{res} f(bi) + \pi i \operatorname{res} f(0))$$

Далее

$$\operatorname{res} f(bi) = \lim_{z\to bi} \frac{e^{iaz}(z-bi)}{z(z^2+b^2)} = -\frac{e^{-ab}}{2b^2} \qquad \operatorname{res} f(0) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{iaz}z}{z(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2}$$

В результате получаем

$$I = \frac{\pi}{b^2}(1-e^{-ab})$$

□

## Интегрирование

**Пример 8** (замена переменной). *Проинтегрировать* $(1+2x)^{10}$

**Решение.** Делаем замену $y = 1+2x$, тогда $dy = 2dx$. Получаем

$$\int (1+2x)^{10}\,dx = \int y^{10}\frac{dy}{2} = \frac{y^{11}}{22} = \frac{(1+2x)^{11}}{22}$$

□

**Пример 9** (по частям). *Проинтегрировать* $e^x \cos x$

**Решение.**

$$\int e^x \cos x\,dx = \int \cos x\,de^x = e^x\cos x - \int e^x\,d\cos x = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx =$$

$$= e^x\cos x + \int \sin x\,de^x = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\,d\sin x = e^x(\cos x + \sin x) - \int e^x\cos x\,dx$$

Откуда $\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+c$. □

**Пример 10.** *Найти площадь, ограниченную кривой* $x^3+y^3=3axy$.

**Решение.** Перейдем к полярным координатам. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Получим уравнение

$$r(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 3a\cos\varphi\sin\varphi$$

По формуле площади в полярных координатах искомая площадь выразится интегралом

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{9a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{2(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}d\varphi$$

Деля числитель и знаменатель на $\cos^6\varphi$ получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{9a^2\operatorname{tg}^2\varphi}{2(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Так как $d\operatorname{tg}\varphi = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$ то преобразуем интеграл к виду

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{9a^2\operatorname{tg}^2\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}d\operatorname{tg}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{3a^2}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}d\operatorname{tg}^3\varphi = -\int\limits_0^{2\pi} d\frac{3a^2}{1+\operatorname{tg}^3\varphi}$$

□