Лекции в ШАД по теории интерполяции.

Е. В. Щепин

Семестр 1

Оглавление

0.1 Интерполяция и телескопирование

Задача интерполяции. Предположим мы знаем значения функции f в некоторых точках, называемых *узлами интерполяции* и мы хотим определить величину f в некоторой точке не входящей в таблицу данных. Эта проблема и называется *задачей интерполяции.* Интерполяцию применяли при вычислении логарифмов, морской навигации, астрономических наблюдениях и во многих других случаях.

Естественным решением этой задачи является построение многочлена, принимающего в узлах интерполяции предписанные значения, и рассмотрение значения этого многочлена в интересующей нас точке. Значения в $(n+1)$ точке определяют единственный многочлен степени n, принимающий предписанные значения в этих точках. В 1676 году Ньютон открыл формулу для таких многочленов, которая называется теперь *интерполяционная формула Ньютона.*

Формула Ньютона и формула Лагранжа Для данных различных узлов интерполяции $x_0, \dots, x_n$ произведение

$$P_j(x) = \prod_{i \neq j}^{n} (x - x_i) \tag{0.1.1}$$

представляет собой многочлен n-ой степени, обращающийся в нуль во всех узлах интерполяции за исключением x_j. Поэтому сумма

$$\sum_{j=0}^{n} f_i \frac{P_j(x)}{P_j(x_j)} \tag{0.1.2}$$

принимает в точке x_i предписанное значение f_i и называется интерполяционным многочленом степени n в форме Лагранжа.

Формула Лагранжа представляет собой сумму многочленов в количестве равном числу узлов интерполяции, при этом каждое слагаемое зависит от всех узлов интерполяции. Узлы интерполяции входят в формулу Лагранжа симметрично и эта формула не зависит от порядка узлов. В формуле Ньютона важен порядок узлов интерполяции и для написания очередного k-го слагаемого достаточно знать предписанные значения в первых k узлов интерполяции.

Поэтому формула Ньютона лучше приспособлена к практике. И сами слагаемые там проще и при добавлении узла интерполяции мало пересчитывать. К тому вычисления по схеме Горнера для факториальных многочленов работают также как для обычных.

Общая интерполяционная формула Пусть $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ представляют совокупность узлов интерполяции. И пусть $f(x_i)$ представляют собой значения функции, которые предписано получить в узлах интерполяции. Интерполяционный многочлен будем искать в виде

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + \\ + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \end{aligned} \tag{0.1.3}$$

где $f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ является неизвестным коэффициентом, значение которого нам предстоит определить.

Для определения $f(x_0, x_1)$ достаточно положить $x = x_1$. Тогда в сумме (0.1.3) остается только два ненулевых слагаемых, и значение $f(x_0, x_1)$ определяется как

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \tag{0.1.4}$$

Дробь в правой части этого равенства называем *относительной разностью* функции $f(x)$ в паре точек x_0, x_1.

Для определения $f(x_0, x_1, x_2)$ положим $x = x_2$. Тогда (0.1.3) превратится в

$$f(x_2) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x_2 - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

откуда

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_0, x_2)}{x_1 - x_2} \tag{0.1.5}$$

В общем случае имеет место формула, которую нетрудно доказать по индукции

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_0, x_1, \dots x_{n-1}) - f(x_0 \dots x_{n-2}, x_n)}{x_{n-1} - x_n} \tag{0.1.6}$$

Применяя эту формулу, также по индукции, нетрудно доказать следующую формулу высших разностей:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, \dots, x_n) = {} & \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} + \\ & + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} + \dots \\ & + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})} \end{aligned} \tag{0.1.7}$$

Равноотстоящие узлы. Рассмотрим случай, когда интерполяционные узлы являются натуральными числами. *Разность функции* f определяется как функция, обозначаемая $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Определим итерированные разности $\Delta^k f$ по индукции: $\Delta^0 f = f$, $\Delta^{k+1} f = \Delta(\Delta^k f)$.

Факториальные степени. Обычные степени x^n имеют сложные разности. Простые же разности имеют так называемые *факториальные степени* $x^{\underline{k}}$. Для любого числа x и любого натурального k, через $x^{\underline{k}}$ обозначаем $x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)$, и через $x^{\underline{-k}}$ обозначаем $\frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+k)}$. Наконец, положим $x^{\underline{0}} = 1$. Факториальные степени удовлетворяют следующему *правилу сложения*

$$\boxed{x^{\underline{k+m}} = x^{\underline{k}}(x-k)^{\underline{m}}} \tag{0.1.8}$$

Мы предоставляем читателю самостоятельно проверить справедливость этого правила для всех целых m, k. Степень $n^{\underline{n}}$ для натурального n совпадает с факториалом $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$. Основное свойство факториальных степеней дается формулой

$$\boxed{\Delta x^{\underline{n}} = nx^{\underline{n-1}}} \tag{0.1.9}$$

Доказательство проводится прямым вычислением:

$$(x+1)^{\underline{k}} - x^{\underline{k}} = (x+1)^{\underline{1+(k-1)}} - x^{\underline{(k-1)+1}} = (x+1)x^{\underline{k-1}} - x^{\underline{k-1}}(x-k+1) = kx^{\underline{k-1}}$$

С помощью этой формулы легко телескопировать любой *факториальный многочлен*, то есть выражение вида $a_0 + a_1x^{\underline{1}} + a_2x^{\underline{2}} + a_3x^{\underline{3}} + \dots a_nx^{\underline{n}}$. Действительно, явная формула для телескопической функции есть $a_0x^{\underline{1}} + \frac{a_1}{2}x^{\underline{2}} + \frac{a_2}{3}x^{\underline{3}} + \frac{a_3}{4}x^{\underline{4}} + \dots \frac{a_n}{n+1}x^{\underline{n+1}}$. Следовательно, мы получаем еще один способ телескопирования степени x^k через представление ее в виде факториального многочлена.

Например, чтобы представить x^2 как факториальный многочлен, рассмотрим $a + bx + cx^{\underline{2}}$, общий факториальный многочлен степени 2. Предположим $x^2 = a + bx + cx^{\underline{2}}$. Подставляя $x = 0$ в это равенство получим $a = 0$. Подставляя $x = 1$, получаем $1 = b$, и, наконец, для $x = 2$ получаем $4 = 2+2c$. Значит $c = 1$. В итоге $x^2 = x + x^{\underline{2}}$. И телескопирующая функция выражается теперь так $\frac{x^{\underline{2}}}{2} + \frac{x^{\underline{3}}}{3} = \frac{1}{2}(x^2 - x) + \frac{1}{3}(x(x^2 - 3x + 2)) = \frac{1}{6}(2x^3 - 3x^2 + x)$. И мы опять получили формулу (0.1.15).

Лемма 0.1.1. *Для любого многочлена $P(x)$, его разность $\Delta P(x)$ является многочленом на единицу меньшей степени.*

Доказательство. Доказательство ведется индукцией по степени многочлена $P(x)$. Разность постоянна для любого многочлена степени один. Действительно, $\Delta(ax + b) = a$. Предположим лемма доказана для многочленов степени $\le n$ и пусть $P(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_kx^k$ является многочленом степени $n + 1$. Тогда $P(x) - a_{n+1}x^{\underline{n+1}} = Q(x)$ имеет степень $\le n$. $\Delta P(x) = \Delta ax^{\underline{n+1}} + \Delta Q(x)$. По предположению индукции, $\Delta Q(x)$ имеет степень $\le n-1$ и, как мы знаем, $\Delta x^{\underline{n+1}} = (n+1)x^{\underline{n}}$ имеет степень n. □

Лемма 0.1.2. *Если $\Delta P(x) = 0$, и $P(x)$ многочлен, то $P(x)$ — константа.*

Доказательство. Если $\Delta P(x) = 0$, то степень $P(x)$ не может быть положительна в силу леммы 0.1.1, значит $P(x)$ — константа. □

Теорема 0.1.1 (Формула Ньютона для многочленов). *Для любого многочлена $P(x)$*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k P(0)}{k!} x^{\underline{k}} \tag{0.1.10}$$

Доказательство. Если $P(x) = ax+b$, то $\Delta^0 P(0) = b$, $\Delta^1 P(0) = a$ и $\Delta^k P(x) = 0$ для $k > 1$. Следовательно ряд Ньютона (0.1.10) превращается в $b+ax$. Это доказывает наше утверждение для многочленов степени ≤ 1. Предположим оно доказано для многочленов степени n. Рассмотрим $P(x)$ степени $n+1$. Тогда $\Delta P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k \Delta P(0)}{k!} x^{\underline{k}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^k P(0)}{(k-1)!} x^{\underline{k}}$ по предположению индукции. Обозначим через $Q(x)$ ряд Ньютона $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k P(0)}{k!} x^{\underline{k}}$ для $P(x)$. Тогда

(0.1.11)

$$\Delta Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k P(0)}{k!}(x+1)^{\underline{k}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k P(0)}{k!} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k P(0)}{k!} \Delta x^{\underline{k}} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k P(0)}{k!} k x^{\underline{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^k P(0)}{(k-1)!} x^{\underline{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k (\Delta P)(0)}{k!} x^{\underline{k}} = \Delta P(x)$$

Значит $\Delta(P(x) - Q(x)) = 0$ и $P(x) = Q(x) + c$. Так как $P(0) = Q(0)$, получаем $c = 0$. Это доказывает равенство $P(x) = Q(x)$. □

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Главная идея суммирования этого ряда основана на следующем тождестве:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\,.$$

Благодаря этому тождеству сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ превращается в сумму разностей

(0.1.12) $$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots$$

И n-я частичная сумма равняется $1 - \frac{1}{n+1}$. Предел частичных сумм равен единице, которая и является суммой всего ряда.

Телескопические суммы. Сумма (0.1.12) представляет собой *телескопическую сумму*. Это название используется для сумм вида $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1})$. Значение телескопической суммы определяется значениями первого и последнего из a_k, подобно телескопу, толщина которого определяется радиусами внешнего и внутреннего колец. Действительно,

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - a_{n+1} = a_0 - a_{n+1}.$$

Те же аргументы для бесконечной телескопической суммы дают

(0.1.13) $$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_0.$$

Но это доказательство действительно только если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$. Последнее несправедливо для $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, из за расходимости гармонического ряда.

Разности. Для данной последовательности $\{a_k\}$ обозначим $\{\Delta a_k\}$ последовательность разностей $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$ и назовем эту последовательность *разностью* последовательности $\{a_k\}$. Главная формула элементарной теории суммирования такова:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k = a_n - a_0} \tag{0.1.14}$$

Для телескопирования ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ достаточно найти последовательность $\{A_k\}$, для которой $\Delta A_k = a_k$. С другой стороны последовательность сумм $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$ имеет разность $\Delta A_n = a_n$. Следовательно, мы видим, что телескопирование суммы эквивалентно нахождению формулы для частичных сумм. Это ведет к понятию *телескопирующей функции.* Для функции $f(x)$ мы введем ее *разность* $\Delta f(x)$ как $f(x+1) - f(x)$. Функция $f(x)$ телескопирует сумму $\sum a_k$, если $\Delta f(k) = a_k$ при любом k.

Часто последовательность $\{a_k\}$, которую мы хотели бы телескопировать имеет вид $a_k = f(k)$ для некоторой функции. Тогда мы ищем *телескопирующую функцию* $F(x)$ для $f(x)$, то есть такую функцию, что $\Delta F(x) = f(x)$.

Вычислить разность функции обычно гораздо легче, чем телескопировать ее. По этой причине вычисляют разности основных функций и составляют *таблицу разностей.* Чтобы телескопировать данную функцию ищут в таблице функции разности которых совпадают или близки к данной функции.

Например, разности функции x^n для $n \leq 3$ суть $\Delta x = 1$, $\Delta x^2 = 2x + 1$, $\Delta x^3 = 3x^2 + 3x + 1$. Чтобы телескопировать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2$ мы выбираем в этой таблице x^3. Тогда $\frac{\Delta x^3}{3} - x^2 = x + \frac{1}{3} = \frac{\Delta x^2}{2} - \Delta \frac{x}{6}$. Следовательно, $x^2 = \Delta\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right)$. Это немедленно влечет следующую формулу для суммы квадратов:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} \tag{0.1.15}$$

Телескопирование интерполяцией. Формула Ньютона дает представление любого многочлена в виде факториального многочлена, который легко телескопируется. Таким образом с помощью формулы Ньютона можно решать задачи о суммировании степеней арифметических прогресссий.

Интерполяционная формула Ньютона позволяет представить x^m как факториальный многочлен $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k 0^m}{k!} x^{\underline{k}}$, где $\Delta^k 0^m$ обозначает величину $\Delta^k x^m$ при $x = 0$. Так как $\Delta x^{\underline{k}} = k x^{\underline{k-1}}$, немедленно получается формула для многочлена $\phi_{m+1}(x)$ телескопирующего x^m в виде

$$\phi_{m+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k 0^m}{(k+1)!} x^{\underline{k+1}} \tag{0.1.16}$$

Для вычисления интерполяционного многочлена составляется *треугольник разностей*. Первый столбец этого треугольника образован значения интерполируемой функции в точках $0, 1, \dots k$. (Значение функции в точке i пишется в i-ой строчке таблицы.) Второй столбец имеет на единицу меньшую высоту и состоит из разностей элементов первого столбца. А именно на i-ой строчке второго столбца пишется разность между i-ой и $(i+1)$-ой строчками первого столбца. Третий столбец строится как столбец разностей из второго столбца по тем же правилам, по которым второй столбец строился из первого. Далее по третьему столбцу строится четвертый, по четвертому — пятый и т. д. Последний — k-ый столбец имеет высоту единица и представляет собой k-ую разность функции в нуле. i-ая разность функции в нуле находится в i-ой строке i-го столбца. Пример треугольника разностей для многочлена x^3 приведен ниже:

0	1	6	6
1	7	12	
8	19		
27			

Для суммирования степеней отрезка натурального ряда можно строить интерполяционный многочлен Ньютона сразу для многочлена телескопирующего степень. В этом случае первый столбец, состоящий из отрезков сумм не вычисляется, а вычисления начинаются со второго столбца — который в данном случае состоит из степеней натуральных чисел.

Отрицательные факториальные степени Факториальные степени удовлетворяют следующему *правилу сложения*

$$\boxed{x^{\underline{k+m}} = x^{\underline{k}}(x-k)^{\underline{m}}}. \tag{0.1.17}$$

При определении отрицательных факториальных степеней исходят из этого правила. Поэтому $x^{\underline{-k}}$ для натурального k определяется формулой

$$x^{\underline{-k}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \tag{0.1.18}$$

Мы предоставляем читателю самостоятельно проверить справедливость этого правила сложения для всех целых m, k. Разность для отрицательных степеней задается, той же самой формулой, что и для положительных.

Восходящие факториальные степени. *Восходящей n-ой факториальной степенью* $x^{\overline{n}}$ числа x называется произведение $x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)$ В частности, $x^{\overline{0}} = 1$ и $x^{\overline{1}} = x$. Если определить *запаздывающую разность функции* $\overline{\Delta} f(x)$ по формуле

$$\overline{\Delta} f(x) = f(x) - f(x-1), \tag{0.1.19}$$

то, как нетрудно проверить, будет справедливо соотношение

$$\overline{\Delta} x^{\overline{n}} = n x^{\overline{n-1}}. \tag{0.1.20}$$

Таким образом, для восходящих степеней и запаздывающей разности возникает теория полностью аналогичная построенной выше для нисходящих степеней и опережающей разности.

Центральные факториальные степени. Решение задачи преобразования данного многочлена в факториальный с помощью формулы Ньютона можно существенно облегчить, в смысле сокращения объема вычислений за счет простого сдвига начала координат. Сдвинутая формула Ньютона выглядит так

$$P(x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k P(x_0)(x - x_0)^{\underline{k}}}{k!} \tag{0.1.21}$$

Для иллюстрации применений сдвинутой формулы рассмотрим задачу нахождения суммы $\sum_{k=1}^{+\infty} k^8$. Если пользоваться обычной формулой Ньютона, то нам придется вычислять треугольник разностей, первый столбец которого содержит восьмизначные числа. Если же воспользоваться сдвинутой формулой для $x_0 = -4$, ты числа в треугольнике разностей будут иметь не более пяти десятичных знаков. В результате телескопирования сдвинутого многочлена Ньютона мы найдем многочлен $Q(x)$ разность которого равна $(x+4)^8$. Этот многочлен также позволяет решить нашу задачу суммирования:

$$\sum_{1}^{99} k^8 = \sum_{-3}^{95} (k+4)^8 = Q(96) - Q(-3)$$

Ситуация, при которой, начало координат удобно сдвигать в окрестность центрального узла интерполяции встречается достаточно часто, что и привело к появлению *центральной формы* теории интерполяции.

А именно, *центральная разность* функции $f(x)$ определяется соотношением:

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\right) \tag{0.1.22}$$

Центральная факториальная степень $x^{[k]}$ определяется разными формулами для четного и нечетного k. А именно, четная степень определяется формулой:

$$x^{[2k]} = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\dots\left(x^2 - \frac{k^2}{4}\right), \tag{0.1.23}$$

а нечетная:

$$x^{[2k+1]} = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)\dots(x^2 - k^2). \tag{0.1.24}$$

При этом формула разности для центральных степеней оказывается идентичной формуле для нисходящих степеней

$$\delta x^{[k]} = k x^{[k-1]} \tag{0.1.25}$$

Центральная форма формулы Ньютона аналогична рассмотренной выше,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k P(0) x^{[k]}}{k!} \tag{0.1.26}$$

так же как и доказательство ее справедливости.

Преобразование Абеля Рассмотрим две последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$. Для любого k справедливо равенство

$$(a_{k+1} - a_k)b_{k+1} + a_k(b_{k+1} - b_k) = a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k \tag{0.1.27}$$

Суммируя эти равенства, получаем следующее

$$\sum_{k=1}^{n} b_{k+1}\Delta a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 \tag{0.1.28}$$

Перенося первое слагаемое из левой части в правую, получаем следующую формулу

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \Delta b_k = \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}\Delta a_k + a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 \tag{0.1.29}$$

Правая часть этой формулы называется *преобразованием Абеля* для суммы, стоящей слева.

Суммирование по частям Преобразование Абеля применяется для суммирования произведений последовательностей в случае, когда мы умеем суммировать одну из них. Продемонстрируем как работает этот прием на примере последовательности $\{k2^k\}$. Поскольку $\Delta 2^k = 2^k$ и $\Delta k = 1$, то формула 0.1.29 дает

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1} + 2^{n+1}(n+1) - 2 = 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^{n+1}n - 3 \tag{0.1.30}$$

Прием суммирования по частям позволяет суммировать произведение геометрической прогрессии на степенную. А именно, представляя геометрическую прогрессию в виде разности другой геометрической прогрессии, после выполнения преобразования Абеля получаем задачу суммирования, в которой степень второго множителя понизилась. Повторяя этот прием столько раз какова была исходная степень, мы доводим задачу до окончательного ответа.

Численное дифференцирование Задача вычисления производных от функции заданной таблицей называется *численным дифференцированием.*

Вычисление первой производной от функции заданной таблицей может быть произведено при помощи интерполяционной формулы Ньютона. А именно, перенося $f(0)$ справа налево и деля обе части равенства на x, из формулы Ньютона с остаточным членом получаем следующую

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-1)^{\underline{k-1}}}{k!}\Delta^k f(0) + \frac{(x-1)^{\underline{n}}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

откуда, переходя к пределу при $x \to 0$, получаем

$$f'(0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{\underline{k-1}}}{k!}\Delta^k f(0) + \frac{(-1)^{\underline{n}}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Подставляя вместо $(-1)^{\underline{k}}$ его значение $(-1)^k k!$ и вместо 0 произвольное x, получаем такую формулу

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \Delta^k f(x) + \frac{(-1)^n}{(n+1)} f^{(n+1)}(\xi).$$

Символически, без остаточного члена, полученный результат можно записать в форме выражения операции дифференцирования $\mathbb{D}$ через операцию разности Δ.

$$\mathbb{D} = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \cdots = \log(\mathbf{1} + \Delta)$$

Задачи.

1. Доказать $\sum\limits_{k=1}^{N} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{N} k \right)^2$
2. Вычислить $\sum\limits_{k=1}^{N-1} (k^3 - 1)k^3$
3. Найти $\Delta^{-1} x 3^x$
4. Суммировать $\sum \cos n$
5. Найти $\Delta^{-1} x^2 \sin x$
6. Вычислить $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$

0.2 Биномиальный ряд

Следующая формула, открытая Ньютоном, носит название *биномиального ряда*

$$(1+x)^y = 1+y\cdot x+\frac{y(y-1)}{2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{3!}x^3+\frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{4!}x^4+\dots$$

Открытие биномиального ряда Ньютон считал своим величайшим открытием. Биномиальный ряд выгравирован на его надгробье в Вестминстерском кладбище. И роль этого открытия в дальнейшем развитиии математики трудно переоценить. И лишь в девятнадцатом столетии Абель сумел дать исчерпывающее доказательство биномиальной формулы Ньютона.

С использованием факториальных степеней биномиальный ряд записывается особенно красиво.

$$\boxed{(1+x)^y = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k y^{\underline{k}}}{k!}} \tag{0.2.1}$$

Ньютоново открытие биномиального ряда. Формулу для k-го коэффициента биномиального ряда для дробного показателя степени $(1+x)^y$ Ньютон получил *интерполяцией*, исходя из полученной формулы для натуральных показателей. Для этого он выразил k-ый биномиальный коэффициент в форме

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!},$$

которая не только была справедливой для всех целых значений, но и допускала подстановку дробных значений n. Потом он проверил, что полученная формула дает верный результат для целых отрицательных показателей. В частности, она превращается в геометрический ряд для $n=1$. Ньютон владел и доказательством этой формулы для рациональных показателей.

Биномиальная теорема для рациональных показателей Тест отношения позволяет доказать абсолютную сходимость биномиального ряда $(1+x)^y = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{y^{\underline{k}}x^k}{k!}$ для $x<1$. Действительно, отношение соседних членов биномиального ряда выражается формулой $x(y-k)/k$. Произведение биномиальных рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a^{\underline{k}}x^k}{k!}$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{b^{\underline{k}}x^k}{k!}$ по теореме Коши равняется сумме ряда, формула n-го члена которого есть $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a^{\underline{k}}b^{\underline{n-k}}}{k!(n-k)!}x^n$. Отсюда мы приходим к необходимости доказательства следующего соотношения:

$$\frac{(a+b)^{\underline{n}}}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^{\underline{k}}b^{\underline{n-k}}}{k!(n-k)!} \tag{0.2.2}$$

Умножение обеих частей этого равенства на $n!$ позволяет придать ему форму *факториального бинома*, аналогичную формуле бинома Ньютона, с заменой обычных степеней на факториальные

$$(a+b)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{\underline{k}} b^{\underline{n-k}} \tag{0.2.3}$$

Доказательство факториального бинома. Для доказательства рассмотрим многочлен $(x+b)^{\underline{n}}$. Он представляет собой сдвинутую факториальную степень. Поэтому разность его представляет сдвиг разности факториальной степени. Следовательно, его k-ая разность равна $\Delta^k n^{\underline{k}}(x+b)^{\underline{n-k}}$. Поэтому разложение этого многочлена в ряд Ньютона дает

$$(x+b)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{\underline{k}} b^{\underline{n-k}}}{k!} x^{\underline{k}}$$

Подстановка в полученную формулу $x = a$ и дает (0.2.3). $\square$

Точность интерполяции.

Лемма 0.2.1. *Если n-кратно дифференцируемая функция $f(x)$ имеет $(n+1)$ корень на отрезке $[a,b]$, то $f^{(n)}(\xi) = 0$ для некоторого $\xi \in (a,b)$*

Доказательство. Доказательство по индукции. Для $n = 1$ это сводится к теореме Ролля. Пусть $\{x_k\}_{k=0}^n$ — последовательность корней функции f. По теореме Ролля любой интервал (x_i, x_{i+1}) содержит корень производной f'. Значит f' имеет по меньшей мере $n-1$ корень, и, согласно предположению индукции, ее $(n-1)$ кратная производная имеет корень в интервале (a,b). Но $(n-1)$-кратная производная от f' совпадает с n-ой производной от f. $\square$

Теорема 0.2.1 (Интерполяционная формула Ньютона с остаточным членом)**.** *Пусть f является $(n+1)$ раз дифференцируемой функцией на $I \supset [0,n]$. Тогда для любого $x \in I$ найдется $\xi \in I$, такое что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} x^{\underline{k}} + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} x^{\underline{k+1}}$$

Доказательство. Формула справедлива для любого $x \in \{0, 1, \dots n\}$ и любого ξ, потому что $x^{\underline{n+1}} = 0$ для таких x. Для остальных x будет $x^{\underline{n+1}} \neq 0$, следовательно, существует C, такое что $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} x^{\underline{k}} + Cx^{\underline{k+1}}$. Функция $F(y) = f(y) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} x^{\underline{k}} - Cy^{\underline{k+1}}$ имеет корни $0, 1, \dots, n, x$. Значит ее $n+1$-я производная имеет корень $\xi \in I$. Так как $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} x^{\underline{k}}$ является многочленом степени n, то его $(n+1)$-я производная тождественно равна 0. И $(n+1)$-ые производные от $Cx^{\underline{n+1}}$ и Cx^{n+1} совпадают, потому что их разность имеет степень n. Итак, $0 = F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)!$ и $C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. $\square$

Преобразование Эйлера Рассмотрим степенной ряд $a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \dots$. Вместо x^k подставим равное ему $x^k = \Delta \frac{x^k}{1-x}$. Получим

$$a_1\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x}\right)+a_2\left(\frac{x^2}{1-x}-\frac{x^3}{1-x}\right)+a_3\left(\frac{x^3}{1-x}-\frac{x^4}{1-x}\right)+\dots \tag{0.2.4}$$

Раскрывая скобки и собирая вместе члены с одинаковыми дробями, преобразуем сумму 0.2.4 к следующему виду

$$a_1\frac{x}{1-x}+\Delta a_1\frac{x^2}{1-x}+\Delta a_2\frac{x^3}{1-x}+\Delta a_3\frac{x^4}{1-x}+\dots \tag{0.2.5}$$

Заменяя в этом равенстве $\frac{x^k}{1-x}$ на равное ему $\Delta\frac{x^k}{(1-x)^2}$ для $k>1$, раскрывая скобки и собирая вместе дроби, преобразуем равенство 0.2.5 к следующему виду

$$a_1\frac{x}{1-x}+\Delta a_1\frac{x^2}{(1-x)^2}+\Delta^2 a_1\frac{x^3}{(1-x)^2}+\Delta^2 a_2\frac{x^4}{(1-x)^2}+\dots \tag{0.2.6}$$

Далее, исходя из равенства $\Delta\frac{x^k}{(1-x)^3}=\frac{x^k}{(1-x)^2}$ преобразуем сумму к виду

$$a_1\frac{x}{1-x}+\Delta a_1\frac{x^2}{(1-x)^2}+\Delta^2 a_1\frac{x^3}{(1-x)^3}+\Delta^3 a_1\frac{x^4}{(1-x)^3}+\dots \tag{0.2.7}$$

Бесконечное повторение подобных преобразований приводит к следующей формуле

$$a_1\frac{x}{1-x}+\Delta a_1\frac{x^2}{(1-x)^2}+\Delta^2 a_1\frac{x^3}{(1-x)^3}+\Delta^3 a_1\frac{x^4}{(1-x)^4}+\dots \tag{0.2.8}$$

Принимая $y=\frac{x}{1-x}$ мы приходим к следующему тождеству

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\Delta^{k-1}a_1 y^k \tag{0.2.9}$$

В случае, когда последовательность a_k имеет нулевыми разности некоторого конечного порядка, как это имеет место для $a_k=k^m$, ряд справа в 0.2.9 конечен и это выражение дает формулу для телескопирования произведения геометрической прогрессии на степенную.

Если в равенстве 0.2.9 положить $x=-1$, то мы получим следующее соотношение, которое Эйлер применял для приближенного суммирования рядов

$$a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+\dots=\frac{a_1}{2}-\frac{\Delta a_1}{2^2}+\frac{\Delta^2 a_1}{2^3}+\dots \tag{0.2.10}$$

Покажем эффективность метода Эйлера на примере альтернированного гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$, сумма которого равна, как мы докажем в дальнейшем, натуральному логарифму двух. Для выполнения преобразования Эйлера необходимо вычислить все разности последовательности $\frac{1}{k}$.

Последовательность первых разностей для нее такова $-\frac{1}{1\cdot2}, -\frac{1}{2\cdot3}, -\frac{1}{3\cdot4}\dots$, то есть общий член последовательности разностей имеет вид $-k^{\underline{-2}}$. Следующие разности имеют вид $\frac{2}{2\cdot3}, \frac{2}{2\cdot3\cdot4}, \frac{2}{3\cdot4\cdot5}\dots$. Откуда ясна закономерность, из которой вытекает, что первый член последовательности k-ых разностей равен $(-1)^k\frac{1}{k+1}$. Поэтому тождество 0.2.10 для суммы альтернированного гармонического ряда дает форму

$$\frac{1}{2\cdot2}+\frac{1}{3\cdot2^2}+\frac{1}{4\cdot2^3}+\frac{1}{5\cdot2^4}+\frac{1}{6\cdot2^5}+\frac{1}{7\cdot2^6}+\frac{1}{8\cdot2^8}\dots \tag{0.2.11}$$

Выписанные семь членов этого ряда дают сумму, отличающуюся от $\ln 2$ менее чем на 0.001, в то время как для исходного ряда для обеспечения такой точности потребовалось бы сложить тысячу членов. То есть преобразование Эйлера значительно ускоряет сходимость ряда, к которому оно применяется. Это преобразование можно итерировать. Так Эйлер вычисляет сумму гипергеометрического ряда $1-2!+3!-4!+5!-\dots$. После однократного применения этого преобразования гипергеометрический ряд приводится к виду

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{11}{16}+\frac{53}{32}-\frac{309}{64}+\frac{2119}{128}-\frac{16687}{256}+\frac{148329}{512}-\frac{1468457}{1024}+\frac{16019531}{2048}-\frac{190899411}{4096}+\dots$$

Далее Эйлер складывает первые два члена получившегося ряда, а остаток преобразует переходя к разностям к виду

$$\frac{3}{2^4}-\frac{5}{2^6}+\frac{21}{2^8}-\frac{99}{2^{10}}+\frac{615}{2^{12}}-\frac{4401}{2^{14}}+\frac{36585}{2^{16}}-\frac{342207}{2^{18}}+\frac{3565321}{2^{20}}-\frac{40866525}{2^{22}}+\dots$$

Из получившегося ряда Эйлер снова отделяет два члена, а остаток преобразует с помощью разностей к виду

$$\frac{21}{2^9}-\frac{15}{2^{12}}+\frac{150}{2^{15}}-\frac{429}{2^{18}}+\frac{5241}{2^{21}}-\frac{26283}{2^{24}}+\frac{338835}{2^{27}}-\frac{2771097}{2^{30}}+\dots$$

Сложение вышеприведенных членов ряда дает возможность найти сумму исходного ряда с точностью до двух-трех десятичных знаков как 0.40082055. В другом месте Эйлер нашел сумму этого ряда с точностью до десяти знаков как $0,4036524077\dots$

Эйлерово вычисление $\sqrt{2}$. Эйлер предложил следующий алгоритм вычисления $\sqrt{2}$. Поскольку $\frac{7}{10}\sqrt{2}=\sqrt{\frac{49\cdot2}{100}}=\sqrt{1-\frac{1}{50}}$, постольку биномиальный ряд для $x=-\frac{1}{50}$ и $y=\frac{1}{2}$ дает такое выражение для корня из двух

$$\sqrt{2}=\frac{10}{7}\left(1-\frac{1}{100}-\frac{1}{100^2 2!}-\frac{3}{100^3 3!}-\frac{3\cdot5}{100^4 4!}-\frac{3\cdot5\cdot7}{100^5 5!}-\dots\right) \tag{0.2.12}$$

Из приведенных выше членов разложения $\sqrt{2}$ вычисляется с точностью до десятого знака после запятой.

Общий метод вычисления корня $\sqrt[n]{x}$ заключается в нахождении рациональной дроби $\frac{p}{q}$ достаточно хорошо приближающей этот корень. Тогда число $\frac{q}{p}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{q^n x/p^n}$ близко к единице и извлечение корня из $\sqrt[n]{q^n x/p^n}$ может быть успешно произведено с помощью биномиального ряда. Результат этого вычисления после этого следует умножить на $\frac{p}{q}$.

Задачи.

1. Написать формулу биномиального ряда для целых отрицательных показателей. В частности для -2 и -3.

2. Суммировать методом Эйлера $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$

3. Суммировать методом Эйлера $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots$

4. Вычислить $\sqrt{3}$ с точностью 10^{-10}

5. Суммировать ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

6. Написать биномиальный ряд для $(1 - 3x)^{\frac{1}{3}}$

7. Суммировать ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 1 \cdot 4 \cdot \ldots (3k+1) x^k / k!$

0.3 Числа и многочлены Бернулли

Суммирующие многочлены. Яков Бернулли нашел общую формулу для сумм степеней арифметической прогрессии. Точнее он открыл такую последовательность чисел $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n \dots$, что при любом n многочлен

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k} x^k, \tag{0.3.1}$$

называемый *многочленом Бернулли* имеет разность

$$\Delta B_n(x) = nx^{n-1} \tag{0.3.2}$$

и потому может служить для суммирования степеней натуральных чисел. А именно

$$1^q + 2^q + 3^q + \dots + m^q = \frac{B_{q+1}(m+1) - B_{m+1}(1)}{q+1} \tag{0.3.3}$$

Первые одиннадцать *чисел Бернулли* таковы:

$$B_0 = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}.$$

Равенство (0.3.2) определяет многочлены Бернулли с точностью до произвольной константы. Но производная многочлена Бернулли уже определяется этим равенством однозначно. Дифференцирование равенства (0.3.2) дает

$$\Delta B'_m = m(m-1)x^{m-2} = \Delta m B_{m-1}.$$

Следовательно $\frac{B'_m}{m}$ также позволяет суммировать $(m-2)$-ую степень, как и B_{m-1}, отличаясь от последнего на константу. Таким образом неопределенность для многочлненов Бернулли можно уничтожить таким образом, чтобы удовлетворить равенству

$$B'_m(x) = mB_{m-1}(x) \tag{0.3.4}$$

Теперь m-е число Бернулли можно определить как значение соответствующего многочлена Бернулли в нуле $B_m = B_m(0)$.

Теорема 0.3.1 (Бернулли)**.** *Все многочлены Бернулли удовлетворяет равенству* (0.3.1).

Доказательство. Для того, чтобы определить коэффициент $B_m(x)$ при k-ой степени x нужно его k-раз продифференцировать и подставить $x = 0$. Если этот коэффициент обозначить a_k, то учитывая правило дифференцирования многочленов Бернулли, получим $B_m^{(k)}(x) = m^{\underline{k}} B_{m-k}(x)$ и потому $k!a_k = m^{\underline{k}} B_{m-k}(0)$. Откуда $a_k = C_m^k B_{m-k}$. □

Так как $\Delta B_m(0) = m0^{m-1} = 0$, то при $m > 1$ имеет место равенство

$$B_m(1) = B_m$$

Подставляя $x = 1$ в (0.3.1) получим соотношение

$$B_m = \sum_{k=0}^{m} C_n^k B_k, \tag{0.3.5}$$

которое позволяет эффективно одно за другим вычислять числа Бернулли.

Теневые формулы. Равенство (0.3.5), для чисел Бернулли можно легко запомнить как "тень"формулы $B^n = (B+1)^n$, где тень формулы с верхними индексами определяется как формула, в которой верхние индексы при некотором символе опущены вниз. Так тенью B^k, обозначающего k-ую степень символа B является k-ое число Бернулли B_k. Аналогично формула многочлена Бернулли (0.3.1) является тенью формулы $B^m(x) = (B+x)^m$.

Формальные вычисления основанные на теневых формулах нередко приводят к правильным результатам. Вот, например, теневой вывод формулы сложения для многочленов Бернулли. Обычная биномиальная теорема дает

$$(B+x+y)^n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (B+x)^k y^{n-k}$$

Переход к теням дает правильную формулу

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k(x) y^{n-k}$$

Характеризационная теорема. Следующее важное свойство многочленов Бернулли называется *сбалансированностью*:

$$\int_0^1 B_m(x)\,dx = 0 \quad (m > 0) \tag{0.3.6}$$

Действительно, $\int_0^1 B_m(x)\,dx = \int_0^1 (m+1)B'_{m+1}(x)\,dx = \Delta B_{m+1}(0) = 0$

Сбалансированность и правило дифференцирования позволяют рекурсивно вычислять многочлены Бернулли. Так, $B_1(x)$ имеет старший коэффициент 1 и нулевой интеграл на $[0,1]$, это позволяет идентифицировать $B_1(x)$ с $x - 1/2$. Интегрирование $B_1(x)$ дает $B_2(x) = x^2 - x + C$, где C определяется в силу (0.3.6) как $-\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{6}$. Интегрируя $B_2(x)$ получаем $B_3(x)$ с точностью до постоянной, которая находится в силу (0.3.6) и так далее. Таким образом мы получаем следующую теорему:

Теорема 0.3.2 (характеризационная)**.** *Если последовательность многочленов* $\{P_n(x)\}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

- $P_0(x) = 1$,
- $\int_0^1 P_n(x)\,dx = 0$ *для* $n > 0$,
- $P'_n(x) = nP_{n-1}(x)$ *для* $n > 0$,

то $P_n(x) = B_n(x)$ *для всех* n.

Продемонстрируем эффективность характеризационной теоремы доказательством следующей *формулы дополнения* для многочленов Бернулли

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x), n \geq 0 \tag{0.3.7}$$

Доказательство. Мы докажем, что последовательность $T_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ удовлетворяет условиям Теоремы 0.3.2. Действительно, $T_0 = B_0 = 1$, $\int\limits_0^1 T_n(x)\,dx = (-1)^n \int\limits_1^0 B_n(x)\,dx = 0$ и

$$T_n(x)' = (-1)^n B'_n(1-x) = (-1)^n n B_{n-1}(1-x)(1-x)' = (-1)^{n+1} n B_{n-1}(x) = nT_{n-1}(x)$$

□

Многочлены Бернулли второго рода. В математике имеется непрерывно-дискретная двойственность, согласно которой операции дифференцирования двойственна операция конечной разности, интегрированию — сумма, степени — факториальная степень. В рамках этой двойственности рассмотренным выше многочленам Бернулли $B_n(x)$ двойственны *многочлены Бернулли второго рода*, обозначаемые $D_n(x)$ и однозначно определяемые соотношениями

$$D_0(x) = 1, \qquad \Delta D_n(x) = nD_{n-1}(x), \qquad D'_n(x) = nx^{\underline{n-1}} \tag{0.3.8}$$

Числа Бернулли второго рода определяются равенством

$$D_n = \int\limits_0^1 x^{\underline{n}} dx \tag{0.3.9}$$

А сами многочлены связаны с числами с помощью тени формулы $(D+x)^{\underline{n}} = D^{\underline{n}}$, то есть

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k D_{n-k} x^{\underline{k}} \tag{0.3.10}$$

Для чисел Бернулли второго рода справедлива формула, являющаяся тенью формулы:

$$D^n = (D-1)^n \tag{0.3.11}$$

Двойственным условию сбалансированности на отрезке $[0,1]$ для многочленов второго рода служит равенство

$$\frac{d}{dx}\Delta^{-1} D_n(x)|_{x=0} = D_n \tag{0.3.12}$$

Производящие функции Бернулли. Следующая функция двух переменных называется *производящей функцией* многочленов Бернулли.

$$B(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\frac{t^k}{k!} \tag{0.3.13}$$

Почленно продифференцируем степенной ряд по x, для фиксированного t. Мы получим $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kB_{k-1}(x)\frac{t^k}{k!} = tB(x,t)$. Следовательно $(\log B(x,t))'_x =$

$\frac{B'_x(x,t)}{B(x,t)} = t$ и $\log B(x,t) = xt + c(t)$, где постоянная $c(t)$ зависит от t. Отсюда следует, что $B(x,t) = \exp(xt)k(t)$, где $k(t) = \exp(c(t))$. Для $x = 0$ мы получаем $B(0,t) = k(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$. Чтобы найти $k(t)$ рассмотрим разность $B(x+1,t) - B(x,t)$. Она равна $\exp(xt+t)k(t) - \exp(xt)$. С другой стороны разность равна $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Delta B_k(x)\frac{t^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kB_{k-1}(x)\frac{t^k}{k!} = tB(x,t)$. Сравнивая эти выражения, мы получаем явные формулы для производящих функций чисел Бернулли:

$$k(t) = \frac{t}{\exp t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k\,, \tag{0.3.14}$$

и многочленов Бернулли:

$$B(x,t) = \sum_{k=+}^{0-1} B_k(x)\frac{t^k}{k!} = \frac{t\exp(tx)}{\exp t - 1} \tag{0.3.15}$$

Из (0.3.13) получаем $t = (\exp t - 1)\sum\limits_{k=0}^{\infty} B_k\frac{t^k}{k!}$. Подставляя $\exp t - 1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ в это равенство, в силу теоремы единственности, получаем равенства для коэффициентов степенных рядов

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!k!} = 0 \quad \text{для } n > 1 \tag{0.3.16}$$

Добавляя $\frac{B_n}{n!}$ к обеим частям этого равенства и умножая обе части на $n!$, получаем

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k n^{\underline{k}}}{k!} \quad \text{для } n > 1 \tag{0.3.17}$$

Последнее равенство является "тенью"формулы $B^n = (B+1)^n$.

Дифференцируя $B_m(x)$ в нуле k раз, мы получаем

$$B_m^{(k)}(0) = m^{\underline{k-1}} B'_{m-k+1}(0) = m^{\underline{k-1}}(m-k+1)B_{m-k} = m^{\underline{k}} B_{m-k}.$$

Следовательно, формула Тэйлора дает следующее представление многочленов Бернулли:

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{m^{\underline{k}} B_{m-k}}{k!} x^k \tag{0.3.18}$$

Эту формулу можно запомнить как тень $(B+x)^m$.

Нечетные числа Бернулли Если вычесть из значения производящей функции чисел Бернулли в точке t ее значение в точке $-t$, то мы, очевидно, получим функцию представленную степенным рядом по нечетным степеням t:

$$2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k-1}t^{2k-1}}{(2k-1)!} \tag{0.3.19}$$

С другой стороны, используя найденный выше явный вид производящей функции, получим, что эта же разность представляется в виде:

$$\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{e^{-t}-1}=\frac{t-te^t}{e^t-1}=-t$$

Так как последнее выражение должно совпадать с (0.3.19), то получаем, что $B_1=-\frac{1}{2}$ и $B_{2k+1}=0$ для любого $k\geq 1$.

Полуцелые числа Бернулли Применим производящую функцию к вычислению $B_n(\frac{1}{2})$

$$B\left(\frac{1}{2},t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\left(\frac{1}{2}\right)\frac{t^k}{k!}=\frac{t\exp\frac{t}{2}}{\exp t-1}=\frac{t}{\exp\frac{t}{2}-1}-\frac{t}{\exp t-1}$$

С другой стороны правая часть равна

$$t\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{t^k}{2^kk!}-\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k-1}-1}\right)B_k\frac{t^k}{k!}$$

Откуда в силу теоремы единственности получаем равенства

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)B_n \tag{0.3.20}$$

Разложение котангенса. Для любой функции $f(t)$ сумма $(f(t)+f(-t))/2$ является ее четной частью, то есть в ее разложении в степенной ряд присутствуют только четные степени t и коэффициенты при этих четных степенях такие же как у $f(t)$. В частности, для производящей функции чисел Бернулли получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!}=\frac{1}{2}\frac{t}{e^t-1}+\frac{1}{2}\frac{-t}{e^{-t}-1}=\frac{t}{2}\frac{e^t+1}{e^t-1}$$

Подставляя в это равенство it вместо t, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kB_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!}=i\frac{t}{2}\frac{e^{it}+1}{e^{it}-1}=i\frac{t}{2}\frac{e^{it/2}+e^{-it/2}}{e^{it/2}-e^{-it/2}}=\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$$

Формула Эйлера. Из разложения котангенса в сумму простейших дробей и предыдущего результата о его коэффициентах вытекает такая формула Эйлера, из которой видно, что числа Бернулли с ростом n растут со скоростью факториала.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}=\frac{(-1)^{n+1}B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!},n\geq 1 \tag{0.3.21}$$

Задачи.

1. Вычислить первые шесть чисел Бернулли с помощью теневой формулы.

2. Представить $B_4(x)$ факториальным многочленом.

3. Представить $x^{\underline{5}}$ линейной комбинацией многочленов Бернулли.

4. Доказать что $B_m(nx) = n^{m-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} B_m\left(x + \frac{k}{n}\right)$

5. Найти производящую функцию многочленов Бернулли второго рода.

6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 B_n(x) \sin 2\pi x \, dx$.

7. Разложить тангенс в степенной ряд

0.4 Формула суммирования Эйлера-Маклорена.

Символический вывод. Разложение в ряд Тэйлора функции f в точке x дает

$$f(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}. \tag{0.4.1}$$

Следовательно $\Delta f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{D}^k f(x)}{k!}$, где $\mathbb{D}$ символизирует операцию дифференцирования. Это равенство символически выражается как

$$\Delta = \exp \mathbb{D} - \mathbf{1}. \tag{0.4.2}$$

Мы ищем F, такое что $F(n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k)$ для всех n. Тогда $\Delta F(x) = f(x)$, или символически $F = \Delta^{-1} f$. Таким образом мы обращаем операцию разности. Из (0.4.2), обращение формально дается формулой $(\exp \mathbb{D} - \mathbf{1})^{-1}$. Эта функция имеет особенность в нуле 0 и потому не может быть представлена степенным рядом по $\mathbb{D}$. Однако мы знаем разложение $\frac{t}{\exp t - 1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k$. Это позволяет дать символическое решение проблемы в такой форме

$$\Delta^{-1} = \mathbb{D}^{-1} \frac{\mathbb{D}}{\exp \mathbb{D} - \mathbf{1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \mathbb{D}^{k-1} = \mathbb{D}^{-1} - \frac{1}{2}\mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k!} \mathbb{D}^{2k-1} \tag{0.4.3}$$

Здесь мы принимаем во внимание, что $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ и $B_{2k+1} = 0$ при $k > 0$. Так как $\sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k) = F(n) - F(m)$, последняя символическая формула дает следующую формулу суммирования:

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = \int_m^n f(x)\,dx - \frac{f(n) - f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m))}$$

Оценка Эйлера. Эйлер применил эту формулу к функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$ и оценил сумму $\sum\limits_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. В этом случае k-ая производная функции $\frac{1}{x^2}$ в точке 10 имеет абсолютную величину $\frac{(k+1)!}{10^{k+2}}$. Следовательно модуль k-го члена суммирующей формулы не превосходит $\frac{B_k}{k10^{k+2}}$. Эйлер предположил, и мы это докажем, что ошибка не превосходит величины первого отброшенного члена. Для обеспечения точности 18 знаков после запятой достаточно суммировать первые 14 членов ряда, потому что $\frac{B_{16}}{16 \cdot 10^{18}} < 10^{-18}$, так как $B_{16} = -\frac{3617}{510}$.

B_1	B_2	B_4	B_6	B_8	B_{10}	B_{12}	B_{14}	B_{16}	B_{18}	B_{20}
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$

Мы видим из таблицы, что, увеличивая число рассматриваемых членов, нельзя существенно повысить точность вычислений.

Численное интегрирование. Пусть $y_k = f(x+(k-1)h)$ представляют собой значения функции $f(x)$ в узлах интерполяции, представляющих арифметическую прогрессию с шагом h. Формула Эйлера-Маклорена с шагом h, полученная из формулы с шагом единица изменением масштаба и приспособленная для нужд численного интегрирования, выглядит так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) -$$

$$- \frac{B_2}{2!}h^2[f'(b) - f'(a)] - \frac{B_4}{4!}h^4[f'''(b) - f'''(a)] - \dots$$

$$- \frac{B_{2p-2}}{(2p-2)!}h^{2p-2}[f^{(2p-3)}(b) - f^{(2p-3)}(a)] - R$$

Здесь остаточный член R имеет вид

$$R = \frac{B_{2p}}{(2p)!}h^{2p+1}[f^{(2p)}(x_1) + f^{(2p)}(x_2) + \dots f^{(2p)}(x_n)]$$

где $x_k \in [a+(k-1)h, a+kh]$. Если функция $f^{(2p)}(x)$ сохраняет постоянный знак в интервале (a,b), то остаточному члену можно придать стандартную форму:

$$R = 2\theta\frac{B_{2p}}{(2p)!}h^{2p}[f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)] \qquad \theta \in [0,1]$$

Формула трапеций. Если в формуле Эйлера-Маклорена положить $p = 1$, то получим формулу трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) + R_1$$

Если функция эмпирическая, то вычислить ошибку R_1 невозможно. Если можно вычислить вторую производную и обозначить через M'' верхний предел абсолютного значения этой производной в интервале (a,b), то

$$|R_1| \le \frac{n}{12}h^3M''.$$

Формула Симпсона. Предположим, что число частичных интервалов четное. Пишем формулу Эйлера-Маклорена для $p = 2$

(0.4.4)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) - \frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] + R_2$$

Теперь применяем эту же формулу для $n/2$ интервалов, полученных слиянием пар смежных интервалов. Получаем

(0.4.5)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = 2h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_2 + y_4 \dots + y_{n-2} + \frac{1}{2}y_n\right) - \frac{4h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] + R_2'$$

Теперь вычитаем (0.4.5) из (0.4.4) умноженного на четыре и получаем формулу Симпсона:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \cdots + 4y_{n-1} + y_n\right) + R_3 \tag{0.4.6}$$

Если $M^{(4)}$ обозначает верхний предел абсолютного значения четвертой производной на (a, b), то величина погрешности формулы Симпсона может быть оценена как

$$|R_3| \leq \left|\frac{4R_2 - R_2'}{3}\right| < \frac{n}{108}h^5 M^{(4)}$$

Если в формуле Эйлера-Маклорена положить $p = 3$, то предыдущие вычисления дают возможность написать формулу Симпсона с поправочным членом:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \cdots + 4y_{n-1} + y_n\right) -$$
$$- \frac{h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)] + R_4.$$

Это улучшение дает в качестве верхнего предела абсолютного значения погрешности

$$|R_4| \leq \frac{17}{22680} n h^7 M^{(4)}$$

Формула суммирования с остаточным членом.

Лемма 0.4.1. *Для любой дифференцируемой функции* $f(x)$ *на* $[0, 1]$ *имеет место равенство*

$$\frac{1}{2}(f(1) + f(0)) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \int\limits_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx$$

Доказательство. Напомним, что $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, следовательно $\int\limits_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx = \int\limits_0^1 (x - \frac{1}{2})\,df(x)$. Теперь интегрирование по частям дает $\int\limits_0^1 (x - \frac{1}{2})\,df(x) = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \int\limits_0^1 f(x)\,dx$. □

Определим *периодический многочлен Бернулли* следующим равенством: $B_m\{x\} = B_m(x - [x])$. Тогда $B_m'\{x\} = mB_{m-1}\{x\}$ для нецелого x.

Обозначим через $\Sigma_m^n a_k$ сумму $\frac{1}{2}a_m + \sum\limits_{k=m+1}^{n-1} a_k + \frac{1}{2}a_n$.

Лемма 0.4.2. *для любых натуральных* p, q *и дифференцируемой функции* $f(x)$ *справедливо равенство*

$$\Sigma_p^q f(k) = \int\limits_p^q f(x)\,dx - \int\limits_p^q f'(x)B_1\{x\}\,dx \tag{0.4.7}$$

Доказательство. В силу леммы 0.4.1 примененной к $f(x+k)$ получаем $\frac{1}{2}(f(k+1)+f(k)) = \int\limits_0^1 f(x+k)\,dx + \int\limits_0^1 f'(x+k)B_1(x)\,dx = \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx + \int\limits_k^{k+1} f'(x)B_1\{x\}\,dx$. Складывая эти равенства для k от p до q, получаем 0.4.7. □

Лемма 0.4.3. *Для натурального $m > 0$ и для дифференцируемой функции f справедливо равенство*

$$\int\limits_p^q f(x)B_m\{x\}\,dx = \frac{B_{m+1}}{m+1}(f(q)-f(p)) - \int\limits_p^q f'(x)B_{m+1}\{x\}\,dx \tag{0.4.8}$$

Доказательство. Так как $B_m\{x\}dx = d\frac{B_{m+1}\{x\}}{m+1}$ и $B_{m+1}\{k\} = B_{m+1}$ для любого натурального k, формула (0.4.8) получается интегрированием по частям. □

Теорема 0.4.1. *Для любой m раз дифференцируемой функции f и любых натуральных n и m будет:*

$$\Sigma_1^n f(k) = \int\limits_1^n f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!}\left(f^{(k)}(n) - f^{(k)}(1)\right) + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int\limits_1^n f^{(m)}(x)B_m\{x\}\,dx \tag{0.4.9}$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по m. Для $m = 1$, формула (0.4.9) как раз совпадает с доказанной в лемме 0.4.2. Предположим, что (0.4.9) доказана для m. *Остаточный член*

$$\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int\limits_1^n f^{(m)}(x)B_m\{x\}\,dx$$

может быть преобразован в силу Леммы 0.4.3 в

$$\frac{(-1)^{m+1}B_{m+1}}{(m+1)!}(f^{(m)}(n) - f^{(m)}(1)) + \frac{(-1)^{m+2}}{(m+1)!}\int\limits_1^n B_{m+1}\{x\}f^{(m+1)}(x)\,dx.$$

Так как нечетные числа Бернулли нулевые, то $(-1)^{m+1}B_{m+1} = B_{m+1}$ для $m > 0$. □

Оценка остаточного члена. Для $m = \infty$, (0.4.9) превращается в (0.4). Обозначим

$$R_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int\limits_1^n f^{(m)}(x)B_m\{x\}\,dx \tag{0.4.10}$$

Это — так называемый *остаточный член* формулы Эйлера–Маклорена.

Лемма 0.4.4. *$R_{2m} = R_{2m+1}$ для любого $m > 1$*

Доказательство. Потому что $B_{2m+1} = 0$, единственное, что изменяется в (0.4.9) при переходе от $2m$ к $2m+1$ — форма остаточного члена. А величина его измениться не может. $\square$

Лемма 0.4.5. *Если $f(x)$ монотонна на $[0,1]$, то*

$$\operatorname{sgn}\int_0^1 f(x)B_{2m+1}(x)\,dx = \operatorname{sgn}(f(1)-f(0))\operatorname{sgn}B_{2m}$$

Доказательство. Так как $B_{2m+1}(x) = -B_{2m+1}(1-x)$, замена $x \to 1-x$ преобразует интеграл $\int_{0.5}^{1} f(x)B_{2m+1}(x)\,dx$ в $-\int_0^{0.5} f(1-x)B_{2m+1}(x)\,dx$:

$$\int_0^1 f(x)B_{2m+1}(x)\,dx = \int_0^{0.5} f(x)B_{2m+1}(x)\,dx + \int_{0.5}^1 f(x)B_{2m+1}(x)\,dx = \int_0^{0.5}(f(x)-f(1-x))B_{2m+1}(x)\,dx \tag{0.4.11}$$

$B_{2m+1}(x)$ равен нулю на концах отрезка $[0,0.5]$ и имеет постоянный знак на $(0,0.5)$, следовательно его знак на интервале совпадает со знаком его производной в 0, то есть, совпадает с $\operatorname{sgn}B_{2m}$. Разность $f(x)-f(1-x)$ также имеет постоянный знак, так как $x < 1-x$ на $(0,0.5)$ и этот знак равен $\operatorname{sgn}(f(1)-f(0))$. Следовательно подъинтегральная функция в (0.4.11) знакопостоянна. Следовательно и сам интеграл имеет тот же знак. $\square$

Лемма 0.4.6. *Если $f^{(2m+1)}(x)$ и $f^{(2m+3)}(x)$ комонотонны (то есть или обе возрастают или обе убывают) для $x \geq 1$ то*

$$R_{2m} = \theta_m \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}(f^{(2m+1)}(n) - f^{(2m+1)}(1)) \quad 0 \leq \theta_m \leq 1 \tag{0.4.12}$$

Доказательство. Знаки остаточных членов R_{2m+1} и R_{2m+3} противоположны. Действительно, в силу чередования знаков чисел Бернулли $\operatorname{sgn}B_{2m} = -\operatorname{sgn}B_{2m+2}$ и $\operatorname{sgn}(f^{(2m+1)}(n) - f^{(2m+1)}(1)) = \operatorname{sgn}(f^{(2m+3)}(n) - f^{(2m+3)}(1)$, в силу условия комонотонности. Откуда $\operatorname{sgn}R_{2m+1} = -\operatorname{sgn}R_{2m+3}$ в силу леммы 0.4.5.

Положим $T_{2m+2} = \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}(f^{(2m+1)}(n) - f^{(2m+1)}(1))$. Тогда $T_{2m+2} = R_{2m+1} - R_{2m+2}$. По лемме 0.4.4, $T_{2m+2} = R_{2m+1} - R_{2m+3}$. Так как R_{2m+3} и R_{2m+1} имеют противоположные знаки получаем, что $\operatorname{sgn}T_{2m+2} = \operatorname{sgn}R_{2m+1}$ и $|T_{2m+2}| \geq |R_{2m+1}|$. Значит $\theta_m = \frac{R_{2m+1}}{T_{2m+2}} = \frac{R_{2m}}{T_{2m+2}}$ принадлежит $[0,1]$. $\square$

Из доказанной леммы немедленно вытекает такая теорема.

Теорема 0.4.2. *Если $f^{(k)}$ и $f^{(k+2)}$ комонотонны для любого $k > 1$, то*

$$\left|\Sigma_1^n f(k) - \int_1^n f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(1)\right)\right| \leq \left|\frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\left(f^{(2m+1)}(n) - f^{(2m+1)}(1)\right)\right| \tag{0.4.13}$$

Следовательно величина ошибки, которую дает формула суммирования (0.4) с m членами имеет тот же знак, что и первый отброшенный член и имеет абсолютную величину не превосходящую абсолютной величины первого отброшенного члена.

Константа Эйлера-Маклорена.

Теорема 0.4.3. *Предположим, что* $\int_1^\infty |f^{(k)}(x)|\,dx < \infty$, $\lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$ *и $f^{(k)}$ комонотонна с $f^{(k+2)}$ для всех k начиная с некоторого K. Тогда существует постоянная C, такая что для любого $m > K$ для некоторого $\theta_m \in [0, 1]$ справедливо следующее*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = C + \frac{f(n)}{2} + \int_1^n f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + \theta_m \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+1)}(n) \tag{0.4.14}$$

Лемма 0.4.7. *При условиях теоремы для любого $m \geq K$ будет*

$$\frac{(-1)^m}{m!} \int_p^\infty f^{(m)}(x) B_m\{x\}\,dx = -\theta_m \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+1)}(p) \tag{0.4.15}$$

Доказательство. Согласно лемме 0.4.6,

$$\frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_p^q f^{(m)}(x) B_m\{x\}\,dx = \theta_m \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}(f^{(2m+1)}(q) - f^{(2m+1)}(p)).$$

Чтобы получить (0.4.15), перейдем к пределу когда q стремится к бесконечности. □

Доказательство. Чтобы получить (0.4.14) мы изменим форму остаточного члена R_K для (0.4.9). Так как $\int_1^n B_K\{x\} f^{(K)}\,dx = \int_1^\infty B_K\{x\} f^{(K)}(x)\,dx - \int_n^\infty B_K\{x\} f^{(K)}(x)\,dx$, применяя равенство 0.4.8 к интервалу $[n, \infty)$ получаем

$$-\frac{(-1)^{k+1} B_k}{k!} \int_n^\infty B_k\{x\} f^{(k)}(x)\,dx = \frac{(-1)^{k+1} B_{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(n) - \frac{(-1)^{k+2} B_{k+1}}{(k+1)!} \int_n^\infty B_{k+1}\{x\} f^{(k+1)}(x)\,dx \tag{0.4.16}$$

Итерирование этой формулы дает
(0.4.17)

$$R_K = \int\limits_1^\infty B_K\{x\} f^{(K)}\,dx + \sum_{k=K}^{m} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(n) + \frac{(-1)^m}{m!} \int\limits_n^\infty B_m\{x\} f^{(m)}(x)\,dx$$

Здесь мы приняли в расчет равенства $(-1)^k B_k = B_k$ и $(-1)^{m+2} = (-1)^m$. Теперь мы подставляем это выражение для R_K в (0.4.9) и полагаем

$$C = (-1)^{K+1} \int\limits_1^\infty B_K\{x\} f^{(K)}(x)\,dx - \frac{f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{K-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(1). \tag{0.4.18}$$

□

Задачи.

1. Вычислить 10 знаков после запятой суммы $\sum\limits_{k=100}^{10^{10}} \frac{1}{k}$
2. Написать выражение с наименьшим числом слагаемых выражающее сумму бесконечного ряда $\sum\limits_{k=10}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ с точностью 10 знаков после запятой.
3. Вычислить 10 знаков после запятой для $\pi = 4\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$
4. Вычислить $\ln 1000!$ с точностью 10^{-4}.

0.5 Гамма функция.

Формальное телескопирование. Мы снова возвращаемся к задаче по данной функции $f(x)$ найти функцию $F(x)$ такую что $\Delta F = f$. В частности для $f = 0$ любая периодическая функция периода 1 будет решением. В общем случае к любому решению задачи можно добавить 1-периодическую функцию и опять получить решение. Формальное решение задачи дает такая формула

$$F(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} f(x+k) \tag{0.5.1}$$

Тригамма. Ряд (0.5.1) сходится для $f(x) = \frac{1}{x^m}$ при $m \geq 2$ и $x \neq -n$ для натурального $n > 1$. В частности, функция

$$\not\digamma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \tag{0.5.2}$$

называется *тригамма* функцией с разностью $-\frac{1}{(1+x)^2}$. Величина $\not\digamma(0)$ как раз равна сумме ряда обратных квадратов.

Теорема 0.5.1. *Если функция $f(x)$ имеет разность $\Delta f(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, то $f(x) = \not\digamma(x)$.*

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \not\digamma(x) = 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x) - \not\digamma(x)) = 0$. Но периодическая функция $f(x) - \not\digamma(x)$ имеет нулевой предел при $x \to \infty$ только если она тождественный ноль. $\square$

Доказанная теорема позволяет охарактеризовать тригамму как единственную функцию телескопирующую $-\frac{1}{(1+x)^2}$ и стремящуюся к нулю при $x \to \infty$.

Дигамма. Ряд $-\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x+k}$, формально телескопирующий $\frac{1}{x}$, расходится. Зато сходится ряд $-\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k}[k \neq 0]\right)$, который также телескопирует $\frac{1}{x}$, потому что добавление постоянной не меняет разности. Действительно,

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+1+k} - \frac{1}{k}[k\neq 0]\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k}[k \neq 0]\right) = -\sum_{k=0}^{\infty} \Delta \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x}. \tag{0.5.3}$$

Функция

$$\digamma(x) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right) \tag{0.5.4}$$

называется *дигамма* функцией. Здесь γ — постоянная Эйлера. Монотонность выделяет $\digamma$ среди других функций телескопирующих $\frac{1}{1+x}$.

Теорема 0.5.2. *Монотонная функция, телескопирующая $\frac{1}{(1+x)}$, отличается от $\digamma(x)$ на константу.*

Доказательство. Предположим $f(x)$ — монотонная функция, телескопирующая $\frac{1}{1+x}$. Для любого $\theta \in [0,1]$ и любого натурального n в силу монотонности $f(x)$ справедливо неравенство $|f(n+\theta)-f(n)| \leq |f(n+1)-f(n)| = \frac{1}{n+1}$. Аналогично $|\digamma(n+\theta)-\digamma(n)| \leq \frac{1}{n+1}$. Откуда для разности $g(x) = f(x)-\digamma(x)$ получаем неравенство

$$|g(n+\theta)-g(n)| \leq |f(n+\theta)-f(n)| + |\digamma(n+\theta)-\digamma(n)| = \frac{2}{n+1}. \tag{0.5.5}$$

Однако $g(x)$ имеет нулевую разность и, следовательно, является 1-периодической функцией. Поэтому левая часть неравенства (0.5.5) от n не зависит. Поэтому переход к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$ дает равенство $g(n+\theta) = g(n) = g(1)$ при любом θ, что и доказывает постоянство $f(x)-\digamma(x)$. $\square$

Лемма 0.5.1. $\digamma' = \bar{\digamma}$.

Доказательство. Чтобы доказать, что $\digamma'(x) = \bar{\digamma}(x)$, рассмотрим $F(x) = \int\limits_1^x \bar{\digamma}(t)\,dt$. Эта функция монотонна потому что $F'(x) = \bar{\digamma}(x) \geq 0$. Далее $(\Delta F)' = \Delta F' = \Delta\bar{\digamma}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$. Откуда $\Delta F(x) = \frac{1}{1+x}+c$, где c постоянна. Так как $\Delta F(x) = \int\limits_x^{x+1} \bar{\digamma}(t)\,dt$ по абсолютной величине не превосходит $|\bar{\digamma}(x)|$, то $\lim x \to \infty \Delta F(x) = 0$. Откуда $c = 0$. По теореме 0.5.2 получаем $F(x)$ отличается от $\digamma(x)$ на константу. Следовательно, $\digamma(x)' = F'(x) = \bar{\digamma}(x)$. $\square$

Телескопирование логарифма. Мы начнем с формального решения $-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\ln(x+k)$. Чтобы уменьшить расходимость добавим почленно $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln k$. Получим $-\ln x - \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\ln(x+k)-\ln k) = -\ln x - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{k})$. Мы знаем, что $\ln(1+x)$ близок к x, но ряд все еще расходится. Теперь сходимость можно достичь вычитая $\frac{x}{k}$ из k-го члена ряда. Это вычитание меняет разность. Посчитаем разность для $F(x) = -\ln x - \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\ln(1+\frac{x}{k})-\frac{x}{k})$. Разность n-го члена ряда есть

$$\left(\ln\left(1+\frac{x+1}{k}\right)-\frac{x+1}{k}\right)-\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right) =$$
$$\left(\ln(x+k+1)-\ln k-\frac{x+1}{k}\right)-\left(\ln(x+k)-\ln k-\frac{x}{k}\right) = \Delta\ln(x+k)-\frac{1}{k}$$

Следовательно,

$$\Delta F(x) = -\Delta \ln x - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\Delta \ln(x+k) - \frac{1}{k}\right) = \tag{0.5.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\Delta \ln x - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\Delta \ln(x+k) - \frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln x - \ln(n+x) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) =$$

$$\ln x + \lim_{n\to\infty}(\ln(n) - \ln(n+x)) + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \ln x + \gamma$$

В результате получается следующая формула для функции телескопирующей логарифм:

$$\Theta(x) = -\gamma x - \ln x - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right) \tag{0.5.7}$$

Теорема 0.5.3. *Ряд* (0.5.7) *абсолютно сходится для всех x за исключением отрицательных целых чисел. Он представляет функцию* логамма $\Theta(x)$, *такую что* $\Theta(1) = 0$ *и* $\Delta\Theta(x) = \ln x$.

Доказательство. Неравенство $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ влечет

$$|\ln(1+x) - x| \leq \left|\frac{x}{1+x} - x\right| = \left|\frac{x^2}{1+x}\right|. \tag{0.5.8}$$

Через ε обозначим расстояние от x до ближайшего отрицательного числа. Тогда благодаря (0.5.8), ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(\left(1+\frac{y}{k}\right) - \frac{y}{k}\right)$ почленно мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\varepsilon k^2}$. Это доказывает абсолютную сходимость для (0.5.7).

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\ln(1+\frac{1}{k})-\frac{1}{k}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\ln n - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}) = -\gamma$, то $\Theta(1) = 0$. □

Выпуклые функции. Существует много функций, телескопирующих логарифм. Свойство, которое выделяет из них Θ называется *выпуклость*.

Следующая формула определяет так называемое *разностное отношение* функции f на интервале $[a, b]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{0.5.9}$$

Функция f называется *выпуклой* на некотором промежутке, если для любой тройки $x < y < z$ точек этого промежутка выполнено неравенство

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \tag{0.5.10}$$

Выпуклость линейной функции $ax + b$ следует из того, что ее разностное отношение постоянно и равно a.

Лемма 0.5.2. *Сумма (даже бесконечная) выпуклых функций выпукла.*

Доказательство. Это верно потому что разностное отношение суммы функций на $[a, b]$ равно сумме разностных отношений. □

Лемма 0.5.3 (выпуклость логарифма)**.** *Если $y > x$, то*

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\ln y - \ln x}{y - x} \leq \frac{1}{y}$$

Доказательство. Поскольку $\ln y - \ln x = \ln(1 + (y-x)/x)$, то базовые оценки логарифма превращаются в следующие

$$\frac{y-x}{x} = \frac{(y-x)/x}{1+(y-x)/x} \leq \ln y - \ln x = \ln(1+(y-x)/x) \leq \frac{y-x}{y}$$

Деление на $y - x$ дает искомые неравенства. □

Характеризационная теорема. Определим *восходящую факториальную степень* $x^{\overline{k}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) = (x+k-1)^{\underline{k}}$.

Теорема 0.5.4. $\Theta(x)$ *является единственной выпуклой функцией телескопирующей* $\ln x$*, для которой* $\Theta(1) = 0$.

Доказательство. Выпуклость Θ вытекает из выпуклости слагаемых ряда, ее представляющего.

Пусть $f(x)$ является выпуклой функцией телескопирующей логарифм. Рассмотрим $x \in (0, 1)$ и произвольное натуральное n. Если $f(1) = 0$, то $f(n) = \ln(n-1)!$. Выпуклость f дает неравенства

$$\frac{f(-1+n) - f(n)}{-1+n-n} \leq \frac{f(x+n) - f(n)}{x+n-n} \leq \frac{f(1+n) - f(n)}{1+n-n}$$

Откуда, ввиду равенства $f(n) = \ln(n-1)!$, получается

$$\ln(n-1) \leq \frac{f(x+n) - f(n)}{x+n-n} \leq \ln n$$

Откуда получаем оценки для $f(x+n)$

$$\ln\left((n-1)^x(n-1)!\right) \leq f(x+n) \leq \ln\left(n^x(n-1)!\right)$$

Так как $f(x+n) = f(x)x(x+1)\dots(x+n-1) = f(x)x^{\overline{n}}$ получаем оценки для $f(x)$

$$\ln\left((n-1)^x(n-1)!\right) - \ln x^{\overline{n}} \leq f(x+n) \leq \ln\left(n^x(n-1)!\right) - \ln x^{\overline{n}}$$

Так как последнее неравенство справедливо при любом n мы и в левой его части можем заменить n на $n+1$. Мы получим тогда

$$\ln\left(n^x n!\right) - \ln x^{\overline{n+1}} \leq f(x) \leq \ln\left(n^x(n-1)!\right) - \ln x^{\overline{n}}$$

Разность между левой и правой частями этого неравенства составляет $\ln(x+n) - \ln n = \ln(1 + \frac{x}{n})$. Мы видим, что разность стремиться к нулю. Поэтому левая и правая части имеют $\Theta(x)$ в качестве общего предела. Следовательно, $f(x) = \Theta(x)$ для x, из интервала $(0, 1)$, а потому и для всех x.

□

В качестве побочного результата приведенного доказательства получается следующая формула

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}} \tag{0.5.11}$$

Именно с помощью этой формулы Эйлер впервые определил гамма-функцию.

О производных функции логамма.

Теорема 0.5.5. *Функция логамма дифференцируема и ее производная совпадает с функцией дигамма.*

Доказательство. Пусть $F(x) = \int\limits_1^x \digamma(x)\,dx$. Так как дигамма положительна и монотонно убывает, этот интеграл представляет собой выпуклую первообразную для дигамма. Его разность имеет производную равную $\Delta\digamma(x) = \frac{1}{x}$. Поэтому $\Delta F(x) = \ln x + c$. Откуда $F(x) - c(x-1)$ совпадает с $\Theta(x)$ в силу теоремы 0.5.4. Следовательно $\Theta(x)$ дифференцируема и ее вторая производная совпадает с $\digamma\!\!\!=(x)$. $\square$

Гамма функция. Эйлерова *гамма функция* $\Gamma(x)$ определяется как $\exp(\Theta(x))$, где $\Theta(x)$ — построенная выше функция, телескопирующая логарифм. Потенцирование (0.5.7) дает представление гамма функции в так называемой *канонической форме Вейерштрасса*:

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} e^{\frac{x}{k}} \tag{0.5.12}$$

Так как $\Delta \ln \Gamma(x) = \ln x$, получаем следующее функциональное уравнение гамма функции, называемое *формулой понижения*:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{0.5.13}$$

Так как $\Theta(1) = 0$, согласно (0.5.3), по индукции на основе (0.5.13) получаем $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Неотрицательная функция f называется *логарифмически выпуклой*, если $\log f(x)$ выпукла.

Теорема 0.5.6 (характеризационная)**.** $\Gamma(x)$ *является единственной логарифмически выпуклой функцией, определенной для всех* $x > 0$, *которая удовлетворяет формуле понижения* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *и принимает в единице значение* 1.

Доказательство. Логарифмическая выпуклость $\Gamma(x)$ следует из выпуклости $\Theta(x)$. Далее $\Gamma(1) = \exp\Theta(1) = 1$. Если f является логарифмически выпуклой функцией, удовлетворяющей формуле понижения, то $\ln f$ удовлетворяет всем условиям теоремы 0.5.4. Следовательно, $\ln f(x) = \Theta(x)$ и $f(x) = \Gamma(x)$. $\square$

Формула удвоения Лежандра. Пусть $G(x) = \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$. Тогда $G(x+1) = \Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x}{2}G(x)$. Следовательно $G(x)2^x$ удовлетворяет функциональному уравнению гамма-функции.Так как $G(x)$ логарифмически выпукла, как произведение логарифмически выпуклых функций, то из характеризационной теоремы заключаем, что $G(x)/G(1)$ совпадает с гамма функцией, то есть $\frac{G(x)2^x}{G(1)2^1} = \Gamma(x)$. Меняя x на $2x$ получаем

$$\boxed{\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}\Gamma(x+0.5)\Gamma(x)}{\Gamma(0.5)}} \tag{0.5.14}$$

Формула дополнения Рассмотрим функцию

$$\phi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x, \tag{0.5.15}$$

определенную для нецелых значений аргумента. Как легко видеть эта функция 1-периодична. А так как она неотрицательна на $[0,1]$, то она неотрицательна всюду.

Запишем формулу удвоения в виде

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = c2^{-x}\Gamma(x) \tag{0.5.16}$$

Заменив в этой формуле x на $1-x$, получим

$$\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right) = c2^{x-1}\Gamma(1-x) \tag{0.5.17}$$

и образуем произведение

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right)\phi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\cos\frac{\pi x}{2} = \frac{c^2}{4}\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x$$

Мы получаем, таким образом соотношение

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right)\phi\left(\frac{x+1}{2}\right) = b\phi(x) \tag{0.5.18}$$

Из функционального уравнения гамма-функции имеем

$$\phi(x) = \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\frac{\sin\pi x}{x} \tag{0.5.19}$$

Поэтому $\phi(x)$ можно по непрерывности доопределить в целых точках $\phi(n) = \pi$.

Мы хотим доказать, что $\phi(x)$ постоянно. Из представления (0.5.19) в силу лемм **??** и **??** вытекает непрерывная дифференцируемость $\phi(x)$ на $[0,1]$. Обозначим, через $g(x)$ производную от $\ln\phi(x)$. Тогда $g(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\frac{1}{2}\left(g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = g(x) \tag{0.5.20}$$

Если $g(x)$ достигает максимального или минимального значения в точке x, то она должна принимать такое же значение в точках $x/2$ и $\frac{x+1}{2}$. Следовательно, $g(x)$ принимает в любой окрестности нуля как максимальные так и минимальные значения. Поэтому непрерывность g в нуле влечет, что максимум и минимум g совпадают. Следовательно, g постоянна. Поэтому $\ln\phi(x)$ — линейная периодическая, а значит, постоянная функция. Значит $\phi(x)=\pi$ при всех x. Таким образом для гамма-функции установлена справедливость следующей *формулы дополнения*

$$\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}} \tag{0.5.21}$$

Вычисление произведений. Из канонической формы Вейерштрасса вытекает

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}\right\}=\frac{-e^{\gamma x}}{x\Gamma(-x)} \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right\}=\frac{e^{-\gamma x}}{x\Gamma(x)} \tag{0.5.22}$$

Можно вычислить много произведений, расщепляя их на части, имеющие каноническую форму (0.5.22). Например, рассмотрим произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$. По формуле разности квадратов преобразуем его к виду $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2n})^{-1}(1+\frac{1}{2n})^{-1}$. Вводя множители $e^{\frac{1}{2n}}$ и $e^{-\frac{1}{2n}}$, получаем каноническую форму

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2n}\right)e^{\frac{1}{2n}}\right\}^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)e^{-\frac{1}{2n}}\right\}^{-1} \tag{0.5.23}$$

Теперь мы применяем (0.5.22) для $x=\frac{1}{2}$. Первое произведение из (0.5.23) равняется $-\frac{1}{2}\Gamma(-1/2)e^{-\gamma/2}$, а второе есть $\frac{1}{2}\Gamma(1/2)e^{\gamma/2}$. Так как согласно формуле понижения $\Gamma(1/2)=-\frac{1}{2}\Gamma(-1/2)$, получаем $\Gamma(1/2)^2/2$ как значение произведения Валлиса.

Задачи.

1. Вычислить $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
2. Выразить произведение через гамма функцию $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{2x}{n}\right)\left(1-\frac{3x}{n}\right)$
3. Выразить произведение через гамма функцию $\prod\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$
4. Выразить через $\Gamma(x)$ произведение $\Gamma(x/3)\Gamma(x+1/3)\Gamma(x+2/3)$ и получить отсюда формулу утроения для гамма-функции.
5. Вычислить $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$
6. Доказать $\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\ln\sqrt{2\pi}$.

7. Доказать, что $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x+k} \left(\frac{k+1}{k}\right)^x = \Gamma(x+1)$

8. Докажите, что $\Delta x^{\underline{k}} = k x^{\underline{k-1}}$ для любых вещественных k, где $x^{\underline{k}} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}$

9. Докажите, что $x^{\underline{k+m}} = x^{\underline{k}}(x-k)^{\underline{m}}$.

10. Выразить произведение через гамма функцию $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k(5+k)}{(3+k)(2+k)}$

11. Вычислить $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n(n+2)})$.

12. Выразить произведение через гамма функцию $\prod \left(1 + \frac{1}{n^4}\right)$

0.6 Эйлеровы интегралы.

Эйлеров интеграл второго рода $\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ представляет гамма-функцию.

Теорема 0.6.1 (Euler). *Для любого* $x \geq 0$ *выполнено равенство* $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$

Убедимся, что эйлеров интеграл удовлетворяет условиям характеризационной теоремы. Для $x = 1$ интеграл дает $\int\limits_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\,|_0^\infty = 1$. Интегрирование по частям $\int\limits_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = -\int\limits_0^\infty t^x\,de^{-t} = -t^x e^{-t}\,|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-t}xt^{x-1}\,dx$ доказывает, что интеграл удовлетворяет формуле понижения гамма функции. Остается доказать логарифмическую выпуклость интеграла.

Характеристика выпуклости

$$\boxed{f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}} \tag{0.6.1}$$

Лемма 0.6.1. *Пусть ограниченная сверху функция* $f(x)$*, определенная на* $[-1,1]$*, удовлетворяет неравенству* (0.6.1) *при любых* $x, y \in [-1,1]$*. Тогда, если* $f(-1)$ *и* $f(1)$ *неположительны, то* $f(x) \leq 0$ *для любого* $x \in [-1,1]$*.*

Доказательство. Определим отображение $s(x)$ отрезка $[-1,1]$ в себя по формуле

$$s(x) = 2x - \operatorname{sgn} x, \tag{0.6.2}$$

где $\operatorname{sgn} x = 1$ для $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$ для $x < 0$, и $sgn(x) = 0$ при $x = 0$. Тогда при любом x справедливо равенство

$$x = \frac{\operatorname{sgn}(x) + s(x)}{2} \tag{0.6.3}$$

Откуда вытекает, что $f(s(x)) \geq 2f(x)$ при любом x из отрезка $[-1,1]$. Поэтому $f(s^n(x)) \geq 2^n f(x)$ и ограниченность сверху последовательности $f(s^n(x))$ влечет неположительность $f(x)$. □

Теорема 0.6.2. *Ограниченная сверху функция, удовлетворяющая неравенству 0.6.1, выпукла.*

Доказательство. Пусть даны $a < b < c$ из области определения функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы. В силу леммы 0.6.1 для любых $x \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$f(a + x(c-a)) - f(a) - (f(c) - f(a))x \leq 0$$

Подстановка $x = \frac{b-a}{c-a}$ в это неравенства дает требуемое неравенство разностных отношений $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$. □

Лемма 0.6.2 (Неравенство Коши-Буняковского).

$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int\limits_a^b f^2(x)\,dx \int\limits_a^b g^2(x)\,dx \tag{0.6.4}$$

Доказательство. Так как $\int\limits_a^b (f(x)+tg(x))^2\,dx \ge 0$ для всех t, дискриминант следующего квадратного уравнения неотрицателен:

$$t^2\int\limits_a^b g^2(x)\,dx + 2t\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx + \int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0 \tag{0.6.5}$$

Этот дискриминант равен $4\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - 4\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\int\limits_a^b g^2(x)\,dx$. □

Теперь мы готовы к доказательству логарифмической выпуклости Эйлерова интеграла. Интеграл, очевидно представляет возрастающую функцию, следовательно достаточно доказать неравенство:

$$\left(\int\limits_0^\infty t^{\frac{x+y}{2}-1}e^{-t}\,dt\right)^2 \le \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\int\limits_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\,dt \tag{0.6.6}$$

Это неравенство превращается в неравенство Коши-Буняковского (0.6.4) для $f(x) = t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}$ и $g(t) = t^{\frac{y-1}{2}}e^{-t/2}$

Бета-функция. Бета-функция — это функция двух переменных $B(x, y)$, которая определяется при $x, y > 0$ с помощью так называемого эйлерова интеграла первого рода

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{0.6.7}$$

Проверим, что он действительно сходится при $x, y > 0$. Достаточно убедиться в сходимости двух интегралов

$$\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Подинтегральное выражение ≥ 0, поэтому достаточно оценить его сверху на отрезках $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ функциями $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ соответственно, для которых сходятся интегралы $\int_0^{1/2}\varphi(t)dt$ и $\int_{1/2}^1\psi(t)dt$. Если $0 \le t \le 1$, то при уменьшении показателя α числа $(1-t)^\alpha$ и t^α не уменьшаются. Мы применим это соображение к тому из сомножителей в $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$, который непрерывен на соответствующем отрезке. На отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ используем, что $(1-t)^{y-1} \le \frac{1}{1-t} \le \frac{1}{2}$, на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ — что $t^{x-1} \le \frac{1}{t} \le 2$. Поэтому

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \le \begin{cases} 2t^{x-1} \text{ при } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2t^{y-1} \text{ при } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

А интегралы $\int_0^{1/2} 2t^{x-1}dt$ и $\int_{1/2}^1 2(1-t)^{y-1}dt$ сходятся.

Лемма 0.6.3. *Для любых положительных x, y справедливо равенство*

$$B(x,y) = B(x+1,y) + B(x,y+1), \tag{0.6.8}$$

Доказательство. Так как $1 = t + (1-t)$, то

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} = t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y,$$

и интегрирование по t сразу даёт (0.6.8). □

Лемма 0.6.4. *Для любых положительных x, y справедливо равенство*

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1). \tag{0.6.9}$$

Доказательство. Интегрирование по частям дает

$$B(x+1,y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt = \int_0^1 t^x d\left(-\frac{(1-t)^y}{y}\right) =$$

$$= -\frac{1}{y}t^x(1-t)^y\Big|_0^1 + \frac{1}{y}\int_0^1 (1-t)^y dt^x = \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \frac{x}{y}B(x,y+1).$$

□

Из (0.6.8) и (0.6.9) сразу получается, что

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y) \tag{0.6.10}$$

(сперва выражаем $B(x,y+1)$ в (0.6.8) через $B(x+1,y)$, пользуясь (0.6.9)).

$x+y$ в знаменателе (0.6.10) нарушает сходство со с формулой понижения гамма-функции. Чтобы убрать этот знаменатель, умножим $B(x,y)$ на функцию $\Gamma(x+y)$, — она как раз умножается на $x+y$ при увеличении x (а значит, и $x+y$) на 1. Мы приходим к мысли рассмотреть функцию $f(x) = B(x,y)\Gamma(x+y)$ (на её зависимость от y мы не указываем явно, так как y некоторое время будет фиксированным). Эта функция удовлетворяет формуле понижения гамма-функции. И она является логарифмически выпуклой функцией от x как произведение двух логарифмически выпуклых функций: $x \mapsto \Gamma(x+y)$ и $x \mapsto B(x,y)$. Логарифмическая выпуклость последней поверяется с помощью неравенства Коши-Буняковского. Из характеризационной теоремы получаем, что $f(x)$ может отличаться от $\Gamma(x)$ на некоторый постоянный множитель a. А так как на самом деле f зависит также и от y, то и этот множитель надо рассматривать как (пока что неизвестную) функцию от y. Мы доказали, что

$$B(x,y)\Gamma(x+y) = a(y)\Gamma(x) \tag{0.6.11}$$

Чтобы найти $a(y)$, положим $x = 1$. Мы знаем, что $\Gamma(1+y) = y\Gamma(y)$ и $\Gamma(1) = 1$; нам надо ещё выяснить, чему равно $B(1,y)$. Это совсем просто:

$$B(1,y) = \int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{y-1}dt = -\int_0^1 \frac{d}{dt}\frac{(1-t)^y}{y}dt = -\frac{(1-t)^y}{y}\Big|_0^1 = \frac{1}{y}.$$

Собирая всё вместе, получаем $\frac{1}{y}y\Gamma(y) = a(y)\cdot 1$, т.е. $a(y) = \Gamma(y)$. Стало быть,

$$\boxed{B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}} \tag{0.6.12}$$

В качестве приложения формулы 0.6.12 мы еще раз вычислим $\Gamma(1/2)$:

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\sin^2\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \int_0^{\pi/2} 2d\varphi = \pi.$$

А из (0.6.12) видно, что $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)$. Поэтому

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{0.6.13}$$

Задачи.

1. $B(x,y) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt$
2. Вычислить $\int\limits_0^1 x^p(1-x^2)^q\, dx$
3. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sqrt{\sin x}\, dx$
4. $\int\limits_0^\infty \frac{t^x}{1+t}\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}$
5. $\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{tg}\phi)^{2x-1}\, d\phi = \frac{\pi}{\sin \pi x}$
6. $\int\limits_0^\infty e^{-at}t^{x-1}\, dt = \frac{\Gamma(x)}{a^x}$
7. $\Gamma(x) = \int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}^{x-1}\right)\, dt$
8. $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{x}}}\frac{1}{x}\, dt$
9. $\Gamma(1+\frac{1}{x}) = \int\limits_0^\infty e^{-t^x}\, dt$
10. $\int\limits_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}}\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\sqrt{\pi}}{n\Gamma\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{2}\right)}$

11. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dt = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{32\pi}}$

12. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^3}}\,dt = \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3}\sqrt[3]{16\pi}}$