ФАНТАЗИИ НА ТЕМУ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ

РОМА МИХАЙЛОВ

Гипотеза Капланского формулируется следующим образом: пусть k некоторое поле и группа G не имеет кручения, тогда групповая алгебра $k[G]$ не имеет делителей нуля. Очевидно, что нетривиальное кручение в группе G обеспечивает делитель нуля в $k[G]$, а именно

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})=0$$

при $x^n=1$ в G. Если же в группе нет кручения, то как нам строить делители нуля в групповой алгебре? Интуиция подсказывает многим из нас, что кольцевая структура групповой алгебры может быть очень сложной и нужно искать контр-пример к гипотезе Капланского. Здесь будут описаны простые идеи. Основные идеи, изложенные здесь - плоды общения с Ильей Рипсом. Пока что, это всего лишь идеи... Главная же идея заключается в том, что эту гипотезу надо пытаться опровергнуть всем миром. Без коллективного творчества она вряд ли проломится. Начнем с небольшого обзора известных результатов по гипотезе Капланского.

0.1. Напомним, что группа G называется сверхразрешимой, если в ней существует ряд нормальных подгрупп

$$1=G_0\trianglelefteq G_1\trianglelefteq\dots\trianglelefteq G_n=G$$

в котором каждый фактор G_{i+1}/G_i цикличен. Форманек доказал [4], что для любой сверхразрешимой группы G без кручения и поля k, групповая алгебра $k[G]$ не имеет делителей нуля. Гипотеза Капланского оказывается верной в ряде других случаев, к примеру, когда группа G упорядочиваема, или когда G гиперболическая без кручения при некоторых дополнительных условиях [3]. Кстати, верна ли гипотеза Капланского для всех гиперболических групп без кручения - не совсем понятно. Илья Рипс сказал, что при построении контрпримера надо держаться от гиперболичности подальше.

По гипотезе Капланского несколько интересных работ написали Лихтман и Пассман. Вот один из результатов Лихтмана [7]. Пусть G группа, N ее центральная подгруппа без кручения, k - произвольное поле и алгебра $k[G/N]$ не имеет делителей нуля, тогда $k[G]$ также не имеет делителей нуля. Помимо прочего, Лихтман представил теоретико-групповую переформулировку гипотезы Капланского. Приведем его результат из [8]. Пусть $G=F/N$, где F свободная группа и $N\trianglelefteq F$. Для $1\neq x\in N$ существует номер k: $x\in\gamma_k(N)\setminus\gamma_{k+1}(N)$, где $\gamma_k(N)$ - k-й член нижнего центрального ряда N, т.к. свободные группы нильпотентно аппроксимируемы. Групповое кольцо $\mathbb{Z}[G]$ не содержит делителей нуля, если для любого набора элементов $x,f_1,\dots,f_n\in F$ где $x\in\gamma_k(N)\setminus\gamma_{k+1}(N)$, и x не является истинной степенью в $\gamma_k(N)$, и элементы $f_i, i=1,2,\dots,n$ выбраны из разных смежных классов G/N, подгруппа N_1, порожденная элементами

$$x_i=f_i^{-1}xf_i,\ i=1,2,\dots,n$$

удовлетворяет условию

$$N_1 \cap \gamma_{n+1}(N) = [N_1, N_1].$$

0.2. Интересное раскрывается в работах Сергея Иванова и Яна Лири [2], [6]. Асферичность связывается с делителями нуля в групповых алгебрах. Вкратце напомним основную идею из работы [6]. Пусть Y - некоторый асферичный 2-мерный комплекс, например, стандартный 2-комплекс, построенный по копредставлению

$$\langle X \mid \mathcal{R} \rangle \tag{0.1}$$

некоторой группы H. Рассмотрим 2-комплекс X, полученный добавлением к Y одной 1-мерной клетки и одной 2-мерной, к примеру, стандартный 2-комплекс для копредставления

$$\langle X, x \mid \mathcal{R}, r \rangle \tag{0.2}$$

группы G такой, что $\pi_2(X) \neq 0$. Предположим, что ядро гомоморфизма $H \to G$ ациклично, т.е. все его целочисленные гомологии в размерности > 0 тривиальны. Тогда производная Фокса

$$\frac{\partial r}{\partial x} \in \mathbb{Z}[G]$$

представляет собой делитель нуля в $\mathbb{Z}[G]$. Теперь предположим, что группа H не имела кручения. Тогда мы находимся в условиях теоремы Клячко и гомоморфизм $H \to G$ является мономорфизмом и условие ацикличности ядра можно не проверять. С другой стороны, асферичность копредставления группы влечет факт, что у группы нет кручения. Получаем следующее.

Для любого асферичного копредставления (0.1) и неасферичного копредставления (0.2) некоторой группы G, элемент группового кольца $\frac{\partial r}{\partial x} \in \mathbb{Z}[G]$ является делителем нуля.

Таким образом, мы приходим к общему вопросу: как испортить асферичность, добавляя один порождающий и одно соотношение, но не добавляя кручения. Теперь немного о доказательстве. Оно практически элементарно. Пусть, как и раньше, Y - стандартный 2-комплекс копредставления (0.1), а X - копредставления (0.2). Рассмотрим их универсальные накрывающие $\tilde{Y}, \tilde{X}$ и относительный цепной комплекс

$$\begin{tikzcd}
H_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & C_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_1(\tilde{X}, \tilde{Y}) \arrow[d, equal] \\
\pi_2(X) \arrow[r, tail] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r, "\frac{\partial r}{\partial x}"] & \mathbb{Z}[G]
\end{tikzcd}$$

Таким образом, любой элемент, приходящий в $\mathbb{Z}[G]$ из второй гомотопической группы X, аннулирует $\frac{\partial r}{\partial x}$. Теперь мы можем взглянуть на очевидные делители нуля поновому. Пусть $r = s^n$, т.е. мы добавляем истинную степень. Тогда имеем

$$\frac{\partial r}{\partial x} = (1 + s + s^2 + \cdots + s^{n-1}) \frac{\partial s}{\partial x}$$

и этот элемент просто обнуляется при умножении на элемент $(1 - s)$, который приходит из $\pi_2(X)$.

Возможно, в ряде случаев, компьютер может помочь установить неасферичность копредставления, скажем, выявив нетривиальное соотношение между соотношениями или элемент третьих когомологий. Есть пакет HAP (homological algebra package), который написан Грахамом Эллисом. Может быть, надо попробовать уже этот метод реализовать на компьютере и дать ему перебирать различные слова r для рассматриваемых выше копредставлений.

0.3. Можно выписать еще несколько "внешних"условий, обеспечивающих присутствие делителей нуля. К примеру, следующее. Пусть

$$\langle X \mid \mathcal{R}, \mathcal{S}\rangle \tag{0.3}$$

некоторое неасферичное копредставление группы F/RS, где $F = F(X)$, $R = \langle \mathcal{R}\rangle^F$, $S = \langle \mathcal{S}\rangle^F$. То есть, мы делим множество всех соотношений на две части. Предположим, что копредставления групп F/R и F/S

$$\langle X \mid \mathcal{R}\rangle, \quad \langle X \mid \mathcal{S}\rangle$$

асферичны. Тогда получаем, что для стандартного 2-комплекса копредставления (0.3), имеет место изоморфизм F/RS-модулей $\pi_2 \simeq \frac{R\cap S}{[R,S]}$. В этих условиях получаем следующее: если группа $F/[R,S]$ нильпотентно аппроксимируема, а пересечение степеней аугментационного идеала в $\mathbb{Z}[F/RS]$ нетривиально, то $\mathbb{Z}[F/RS]$ содержит нетривиальный делитель нуля. Подобных спекулятивных связей можно понаписать много, конечно, но вряд ли они помогут построить контрпример к гипотезе Капланского.

0.4. Итак, мы хотим построить контрпример к гипотезе Капланского. Возможно, пример, когда он построится, будет иметь природу групп Стейнберга, групп Артина или еще чего-нибудь арифметико-геометрического. Пока что нам ничего не остается, как строить пример силой. Есть два пути: первый - начинать с группы без кручения и искать делители нуля в ее групповом кольце, второй - начинать с группы, у которой есть делители нуля в групповом кольце и пытаться доказывать, что она не имеет кручения. Первый путь - путь в бездну, о нем лучше забыть.

Начнем с общего примера. Рассмотрим группу G порожденную $4n$ элементами

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n, \ (n \geq 2) \tag{0.4}$$

Рассмотрим следующие соотношения

$$a_i c_j = b_{\sigma(i,j)} d_{\tau(i,j)}, \tag{0.5}$$

$$a_i d_j = b_{\lambda(i,j)} c_{\mu(i,j)} \tag{0.6}$$

для всех i, j, и некоторых функций

$$\sigma, \tau, \lambda, \mu : \{1, \dots, n\}^2 \to \{1, \dots, n\},$$

таких что их пары

$$(\sigma, \tau), (\lambda, \mu) : \{1, \dots, n\}^2 \to \{1, \dots, n\}^2$$

задают биекции множества $\{1, \dots, n\}^2$. То есть, для любой пары индексов (i', j'), существует единственная пара индексов i, j, таких что $i' = \sigma(i, j), \ j = \tau(i, j)$, аналогично с функциями λ, μ. В этом случае мы получаем делители нуля:

$$(a_1 + \dots + a_n + b_1 + \dots + b_n)(c_1 + \dots + c_n - d_1 - \dots - d_n) = 0 \tag{0.7}$$

Обозначим через $G(\sigma, \tau, \lambda, \mu)$ группу, заданную порождающими (0.4) и соотношениями (0.5), (0.6). Эти делители нуля нетривиальны в случае, если правая скобка в (0.7) не равна нулю тождественно (а это уже почти всегда так будет). Таким образом мы получаем огромный класс групп с делителями нуля в групповых кольцах. Нам надо выловить хотя бы одну группу из этого класса, не имеющую кручения. Естественно, данную конструкцию можно варьировать: расставлять минусы не только в правой скобке, но и в левой, рассматривать разное количество слагаемых в левой и правой скобке и т д.

Тут имеется интересный тип идей:

Контрпример к случайной гипотезе должен строиться случайным образом. Пусть хаос за нас строит этот контрпример, мы лишь докажем, что он существует. Пусть хаос задаст сложные перемешивания $\sigma, \tau, \lambda, \mu$. Кручению там неоткуда будет взяться.

Михаил Громов сразу же спрашивает: а что можно сказать про случайную группу $G(\sigma, \tau, \lambda, \mu)$? Будет ли она гиперболической? Будет ли в ней кручение? "Случайность"здесь хорошо формализуется - это "случайность"выбора биекций $(\sigma, \tau), (\lambda, \mu)$. Есть же развитая теория случайных матриц, случайных графов. Берем и считаем!

Если же мы хотим построить контрпример руками, и не доверяем хаосу, то нам придется пробиваться через сложности. Отметим, что на данный момент неизвестно даже потенциальных контрпримеров, т.е. групп, похожих на контрпримеры к гипотезе Капланского. Давайте такие найдем. Давайте найдем группы типа $G(\sigma, \tau, \lambda, \mu)$, у которых нет очевидного кручения. У них может оказаться спрятанное кручение, где-то там... в глубине. Итак, первая задача:

Просим компьютер перебирать группы $G(\sigma, \tau, \lambda, \mu)$. Для каждого выбора функций $\sigma, \tau, \lambda, \mu$, уменьшаем до предела количество порождающих. Длины соотношений при этом растут, естественно. Когда лишних порождающий уже не осталось - смотрим, не является ли какое-нибудь из соотношений истинной степенью. Если является - отбрасываем этот случай, переходим к следующему, благо, тут свободы много. Если же нет истинной степени среди соотношений - просим компьютер поискать кручение на поверхности, это они могут сделать. Таким образом найдутся группы, похожие на контрпримеры.

Искать надо начинать, видимо, с $n = 3$. При $n = 2$ слишком мало свободы, группы слишком простые оказываются. Следующая идея. Компьютер, естественно, не может однозначно определить, есть ли кручение в нашей группе или нет. Но мы можем половить кручение следующим образом. Мы начнем с веры в следующее: среди групп $G(\sigma, \tau, \lambda, \mu)$ может оказаться куча нильпотентно аппроксимируемых групп. Нильпотентная аппроксимируемость является отдельным свойством, которое не особо зависит от того, что здесь происходит. Естественно, это не аппроксимируемость нильпотентными группами без кручения, т.к. для нильпотентных групп гипотеза Капланского верна, это просто тривиальность пересечения нижнего центрального ряда. Если у нас есть кручение в группе $G(\sigma, \tau, \lambda, \mu)$, то оно скорее всего сидит в первых членах нижнего центрального ряда, так как соотношения группы, которые мы рассматриваем, весьма далеки от коммутаторных. Берем фактор-группу нашей группы по коммутанту. Компьютер описывает все кручение. Фиксируем это кручение. Теперь берем фактор-группу по $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ на каждом шаге получаем кручение, и при этом смотрим, как оно меняется. Если у нас экспонента фиксирована - это, возможно, чистое кручение. Если же, у нас, скажем p-кручение по модулю γ_2, p^2-кручение по модулю γ_3, p^3-кручение по модулю γ_4, то это похоже на обобщенное кручение и такие примеры мы учитываем, как потенциальные контрпримеры. Здесь достаточно посмотреть до γ_5, т.к. это уже достаточно глубоко. Если ни одно чистое кручение не зафиксировалось - хороший пример, надо его копать глубже. Компьютер может полностью описывать кручения в нильпотентных группах малых ступеней нильпотентности. Есть специальные пакеты для работы с нильпотентными группами в GAP. Задача, о которой идет речь здесь следующая:

Найти простейшую группу типа $G(\sigma, \tau, \lambda, \mu)$, не содержащую очевидного кручения.

Итак, пусть у нас имеется группа $G(\sigma, \tau, \lambda, \mu)$, в которой мы не видим кручения. Естественно, можно попробовать построить асферичное копредставление этой группы, чтобы доказать, что в ней действительно нет кручения. Но для групп с асферичным копредставлением гипотеза Капланского вполне может оказаться верна, хотя и не понятно, почему. Скажем, для групп узлов как ее доказать? Пусть у нас есть неасферичное копредставление этой группы. Мы пробуем описать все π_2 этого копредставления, т.е. найти все соотношения между соотношениями, далее - выявить высшие сизигии и тем самым построить резольвенту. Резольвента оборвется на конечном шаге - все сделано. Таким образом, возникает общий вопрос:

Могут ли среди групп $G(\sigma, \tau, \lambda, \mu)$ встретиться группы конечной когомологической размерности?

Соотношения (0.5) и (0.6) надо визуализировать. Точками изобразить порождающие a_i, b_j, а стрелками соединять a_i с b_j, если у нас есть соотношение $a_i c_k = b_j d_l$, при этом на стрелке рисуя метку (k, l), или (можно это рисовать другим цветом) стрелку с меткой (k, l), если есть соотношение $a_i d_k = b_j c_l$. Когда мы все соединим, то получим некоторый граф. Как увидеть кручение в группе из структуры этого графа? У Ильи Рипса были дальнейшие идеи о построении конечномерного классифицирующего пространства группы $G(\sigma, \tau, \lambda, \mu)$ исходя из подобных графов. Интересно, что это напоминает технику иероглифов Капранова-Саито, и вообще те группы и соотношения, которые рассматривал Лодэй в рамках своей работы по гомотопическим сизигиям. В группах Стейнберга бы имеем схожую картинку - кучу соотношений длины 3,4,5, из которых склеиваются некоторые сизигии, играющие важную роль в алгебраической K-теории. Не исключено, что K-теория сыграет роль при построении контрпримера к гипотезе Каланского, но на данный момент это кажется достаточно далеким. См. работы Капранова-Саито про иероглифы [5] и Лодэя про сизигии [9]. Но развивать теорию абстрактных групп $G(\sigma, \tau, \lambda, \mu)$ кажется слишком суетным. Программа проста:

Сначала с помощью компьютера находим группу $G(\sigma, \tau, \lambda, \mu)$ без видимого кручения, а дальше для этой конкретной группы выстраиваем геометрию сизигий и пытаемся построить конечномерное классифицирующее пространство, тем самым *доказав, что в ней нет кручения.*

Собственно, вопрос о потенциальном контрпримере - это вопрос примитивной лингвистики, вопрос об игре с буквами, который может решить машина. Математика начнется уже потом - когда будем строить конечномерное классифицирующее пространство.

0.5. В завершении несколько спекуляций на тему "как рисовать делители нуля". Напомним определение *скрещенного модуля над k-алгеброй* [1]: это тройка (V, A, ∂) где A некоторая k-алгебра, V градуированный A-бимодуль и $\partial : V \to A$ морфизм A-бимодулей, такой что $(\partial v)w = v(\partial w)$ для $v, w \in V$. В работе [1] показано, что скрещенные модули классифицируются третьими когомологиями Хохшильда $HH^3(B, M)$, где $B = coker(\partial)$, $M = ker(\partial)$. Вспомним теперь, что обычные скрещенные модули (групп) $\partial : H \to G$ классифицируются третьими когомологиями $H^3(coker(\partial), ker(\partial))$. Теперь, для любой группы G и $\mathbb{Z}[G]$-модуля M, мы получаем гомоморфизм

$$H^3(G, M) \to HH^3(\mathbb{Z}[G], M)$$

который может рассматриваться как отображение между скрещенными модулями групп и скрещенными модулями алгебр.

(См. определение и замечание 3.7 в [1]) Для данного скрещенного модуля

$$\partial : V \to A$$

над V и $a, b, c \in coker(\partial)$, таких что

$$ab = 0, \ bc = 0, \tag{0.8}$$

существует канонический класс

$$\langle a, b, c\rangle \in M/(aM + Mc),$$

называемый *тройным произведением Масси* элементов a, b, c. Ведь это интересно с точки зрения изучения делителей нуля. Тройка делителей нуля (0.8) и элемент из третьих когомологий $HH^3(\mathbb{Z}[G], M)$, задают элемент $\langle a, b, c\rangle$ с кучей полезных свойств. Тройные произведения Масси достаточно просто задаются комбинаторно, так что, это осязаемая теория.

Теперь смотрим на некоторое копредставления группы G:

$$K_G = \langle X \mid \mathcal{R}\rangle,$$

и строим скрещенный модуль для данного копредставления, после чего рассматриваем соответствующий элемент в $HH^3(\mathbb{Z}[G], \pi_2(K_G))$ и смотрим на произведения Масси делителей нуля в $\mathbb{Z}[G]$. Таким образом мы получаем следующее:

для любого копредставления K_G и делителей нуля $ab = 0$, $bc = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}[G]$, получаем их произведение Масси

$$\langle a, b, c\rangle \in \pi_2(K_G)/(a\pi_2(K_G) + \pi_2(K_G)c)$$

У нас есть куча языков, позволяющих описывать элементы из π_2. Мы можем их рисовать с помощью картинок Игусы. Это дает некоторую визуализацию произведений Масси делителей нуля в групповых кольцах. Возможно, это может оказаться дорогой доказательства, что в некоторых групповых кольцах нет делителей нуля.

Список литературы

[1] H.-J. Baues and E.G. Minian: Crossed extensions of algebras and Hochschild cohomology, *Homology, Homotopy and Applications,* **4** (2002), 63-82
[2] S. Ivanov: An asphericity conjecture and Kaplansky problem on zero divisors, *J. Algebra* **216** (1999), 13-19.
[3] T. Delzant: Sur l'anneau d'un groupe hyperbolique, *C.R. Acad. Sci. Paris* **324**, (1997), 381-384.
[4] E. Formanek: The zero divisor question for supersolvable groups, *Bull. Austral. Math. Soc.* **9** (1973), 67-71.
[5] M. Kapranov and M. Saito: Hidden Stasheff polytops in algebraic K-theory and in the space of Morse functions, *Cont. Math.* **227** (1999)
[6] I. Leary: Asphericity and zero divisors in group algebras, *J. Algebra* **227** (2000)
[7] A. Lichtman: The zero divisor problem for a class of torsion-free groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **82** (1981), , 188-190.
[8] A. Lichtman: A group theoretical equivalent of the zero divisor problem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **97**, (1986).
[9] J.-L. Loday: Homotopical syzygies, *Cont. Math.* **265** (2000), 99-127