

## Расслоения, характеристические классы и кобордизмы

Задачи письменного домашнего экзамена 19 мая 2006 года  
(отл./хор./удовл.)~(4/3/2) полностью решенные задачи.

Готовые работы оставлять в моей почтовой ячейке в НМУ или МИАН до 31 мая;  
желающим получить оценки раньше необходимо прислать их по e-mail  
<kazarian@mccme.ru> в любом формате (.txt, .tex, .ps, .pdf, .doc и т.п.)

1. Выразите классы Черна расслоения  $\text{Hom}(E, F)$  через классы Черна заданных комплексных расслоений  $E$  и  $F$  ранга 2.
2. Пусть  $V \subset \mathbb{C}P^4$  гладкая комплексная гиперповерхность, заданная однородным многочленом степени 5 с общими коэффициентами. Сколько имеется проективных прямых, целиком лежащих в  $V$ ?
3. Вычислите однородные компоненты степеней 3 и 4 полного класса  $\text{By } W = \text{Sq}^{-1}\omega = 1 + \omega_1 + (\omega_1^2 + \omega_2) + \dots$ .
4. Группа комплексных бордизмов  $\Omega_4^U$  порождена классами многообразий  $\mathbb{C}P^2$  и  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ . Выразите через эти образующие классы следующих многообразий: а) гладкой гиперповерхности  $V_d$  степени  $d$  в  $\mathbb{C}P^3$ ; б) гладкой гиперповерхности в  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$  бистепени  $(1, 1)$ .
5. Пусть  $X$  и  $Y$  — комплексные компактные многообразия, такие, что  $\dim Y = \dim X - 1$ . Тогда класс когомологий  $y_2$ , двойственный циклу самопересечения гиперповерхности критических значений общего отображения  $f : X \rightarrow Y$ , задается формулой

$$y_2 = \frac{1}{2} (f_*(c_1^2 - c_2)^2 - f_*(7c_1^3 - 8c_1c_2 + c_3)),$$

где  $c_i = c_i(f^*TY - TX)$  — относительные классы Черна. Используя эту формулу, дайте ответ на следующий вопрос: сколько существует кривых степени  $d$  на комплексной плоскости, имеющих две точки самопересечения и проходящих через заданные  $\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 3$  общие точки плоскости? (Указание:  $Y$  — проективное пространство всех кривых степени  $d$ ;  $X$  — многообразии пар вида (кривая, точка на ней). При  $d = 3$  всякая кривая задачи является объединением квадрики и прямой, и ответ в этом случае можно проверить более простым прямым способом.)