

Малые торические вырождения трёхмерных многообразий Фано: индексы пересечения на торических многообразиях в неоднозначных случаях.

С. С. Галкин

1 апреля 2008 г.

Содержание

0.1	Обозначения.	1
0.2	Многообразия с инвариантами $(\rho = 2, \text{deg} = 30, b = 0)$	2
0.3	Многообразия с инвариантами $(\rho = 2, \text{deg} = 46, b = 0)$	3
0.4	Многообразия с инвариантами $(\rho = 3, \text{deg} = 36, b = 0)$	4
0.5	Многообразия с инвариантами $(\rho = 3, \text{deg} = 38, b = 0)$	6
0.6	Многообразия с инвариантами $(\rho = 3, \text{deg} = 42, b = 0)$	8
0.7	Многообразия с инвариантами $(\rho = 4, \text{deg} = 32, b = 0)$	9

1.1 Обозначения.

Теорема 1.1. Пусть X — неособое и собственное (возможно, не проективное) торическое многообразие. Кольцо когомологий $H^*(X, \mathbb{Q})$ порождено классами инвариантных дивизоров D_{ρ_i} . Соотношения в этом кольце порождены соотношениями Стенли–Ризнера — для всякого $J \subset \Sigma^{(1)}$, не содержащегося ни в одной грани Δ , выполнено

$$\prod_{j \in J \subset \Sigma^{(1)}} D_{\rho_j} = 0,$$

и соотношениями тривиальности главных дивизоров - $\forall m \in M$

$$\sum_i \langle m, \rho_i \rangle D_{\rho_i} = 0.$$

Это означает что в кольце когомологий гладкого торического многообразия все соотношения порождаются наивными: пересечение k различных дивизоров пусто, если соответствующие этим дивизорам 1-мерные грани не лежат на одной k -мерной грани σ . Если же лежат, то они трансверсально пересекаются в $(d - k)$ -мерной орбите соответствующей грани σ .

Лемма 1.2. Пусть X_Σ — гладкое n -мерное торическое многообразие. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$x_{j_1 \dots j_n} = 0, \text{ если } \{\rho_{j_1} \dots \rho_{j_n}\} \text{ не конус в } \Sigma$$

$$\sum \langle m, \rho_j \rangle x_{j_1 \dots j_{i-1} j_{i+1} \dots j_n} = 0$$

Она имеет единственное с точностью до пропорциональности решение. Выберем единственное решение удовлетворяющее условию $x_{j_1 \dots j_n} = 1$, если $\{\rho_{j_1} \dots \rho_{j_n}\}$ является конусом в Σ . Тогда числа $x_{j_1 \dots j_n}$ равны индексам пересечения дивизоров $D_{j_1} \cdot \dots \cdot D_{j_n}$ на X_Σ .

Предложение 1.3. Для дивизора Вейля $\sum a_\rho D_\rho$ условие локальной главности в обыкновенной двойной особенности на трёхмерном торическом многообразии выглядит так — сумма коэффициентов при инвариантных неприводимых дивизорах соответствующих концам диагонали $\rho_{AR} \rho_C$ параллелограмма $\rho_{AR} \rho_B \rho_C \rho_D$ равна аналогичной сумме на концах диагонали $\rho_B \rho_D$:

$$a_{\rho_A} + a_{\rho_C} = a_{\rho_B} + a_{\rho_D}.$$

Лемма 1.4. Пусть X — нодальное трёхмерное торическое многообразие Фано. Тогда группа $\text{Pic}(X)$ определяется из точной последовательности

$$0 \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{X}) \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{ABCD} \mathbb{Z},$$

в последнем члене суммирование происходит по всем базисным параллелограммам $\rho_{AR} \rho_B \rho_C \rho_D$ для X , $\phi = \bigoplus_{ABCD} \phi_{ABCD}$, и $\phi_{ABCD}(\sum a_\rho D_\rho) = (a_{\rho_A} - a_{\rho_B} + a_{\rho_C} - a_{\rho_D})$.

Замечание 1.5. Используя лемму 0.2 и лемму 0.4, можно достаточно эффективно вычислить теорию пересечений на группе Пикара $\text{Pic}(X)$ \mathbb{Q} -горенштейнового торического многообразия X , имеющего малое разрешение $f: \tilde{X} \rightarrow X$

(например, этим свойством обладает трёхмерное нодальное X). Индекс самопересечения D^n дивизора Картье $D \in \text{Pic}(X)$ равен индексу пересечения его полного (совпадающего с собственным) прообраза $\tilde{D} = f^*D$ на \tilde{X} . При малом раздутии группа дивизоров Вейля не меняется, дивизор \tilde{D} представлен тем же самым дивизором Вейля, что и D (его собственным прообразом).

Таким образом, чтобы найти индексы пересечения на $\text{Pic}(X)$ нужно решить две системы линейных уравнений: одну систему на индексы пересечений $D_{i_1} \cdot \dots \cdot D_{i_n}$ описанную в 0.2, и вторую — систему уравнений 0.3 чтобы выделить $\text{Pic}(X)$ как подгруппу в $\text{Pic}(\tilde{X})^1$.

Обозначение. Пусть M — целочисленная матрица размера $3 \times v$. Обозначим через $\Delta(M)$ многогранник, являющийся выпуклой оболочкой векторов-столбцов M . Пусть M выбрана так, что 0 лежит строго внутри $\Delta(M)$, и ни один из столбцов M не лежит в выпуклой оболочке остальных. Через $\mathbb{P}(M)$ обозначим торическое многообразие Фано, соответствующее многограннику $\Delta(M)$. Пусть D_i — инвариантные дивизоры Вейля, соответствующие i -ой вершине многогранника $\Delta(M)$, G_1, \dots, G_ρ — образующие группы $\text{Pic}(\mathbb{P}(M))$.

Для вычисления инварианта d сначала мы находим все индексы пересечения для элементов базиса группы Пикара $\text{Pic}(\mathbb{P}(M))$, затем вычисляем дискриминант. Чтобы вычислить индексы пересечения

¹Сценарий для *pari/gp* реализующий описанный выше алгоритм: <http://www.mi.ras.ru/galkin/work/NodalToric3foldPicard.gp>.

дивизоров из $\text{Pic}(\mathbb{P}(M))$ мы используем соображение 0.5 — вычисляем кольцо $H^*(\tilde{\mathbb{P}}(M))$, индексы пересечения для элементов группы Пикара $\text{Pic}(\tilde{\mathbb{P}}(M))$ малого крепантного разрешения² $\phi : \tilde{\mathbb{P}}(M) \rightarrow \mathbb{P}(M)$, затем получаем индексы пересечения на $\mathbb{P}(M)$ ограничением с $\tilde{\mathbb{P}}(M)$.

1.2 Многообразие с инвариантами ($\rho = 2, \text{deg} = 30, b = 0$).

Случай 1.6 ($v = 9, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_1 + D_4 + D_5 + D_8, G_2 = -D_1 + D_6 + D_9.$$

$$\text{int}(aG_1 + bG_2, aG_1 + bG_2, aG_1 + bG_2) = (aG_1 + bG_2)^3 = a^3 + 6ba^2 - 2b^3$$

$$-K = G_1 + 2G_2$$

$$d = -24$$

Случай 1.7 ($v = 10, f = 11$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_7 + D_8 + D_9, G_2 = D_2 + D_3 + D_5 - D_6 + D_{10}.$$

$$(aG_1 + bG_2)^3 = -2a^3 + 6ba^2 - 3b^3$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2$$

$$d = -24$$

Случай 1.8 ($v = 9, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = -D_1 + 2D_3 + D_4 - D_7 + D_8, G_2 = D_1 + D_7 + D_9.$$

$$(aG_1 + bG_2)^3 = 3ba^2 + 6b^2a$$

$$-K = G_1 + G_2$$

$$d = -21$$

²Мы берём произвольное максимальное крепантное разрешение, как объяснялось в 0.5, ответ получится одинаковый для проективного и непроективного разрешения.

1.3 Многообразия с инвариантами ($\rho = 2, \deg = 46, b = 0$)

Случай 1.9 ($v = 6, f = 7$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_4 - D_3, G_2 = D_3 + D_5.$$

$$(aG_1 + bG_2)^3 = a^3 - 3ba^2 + 3b^2a + b^3$$

$$-K = G_1 + 3G_2$$

$$d = -12$$

Случай 1.10 ($v = 6, f = 7$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_4 - D_2, G_2 = D_2 + D_6.$$

$$(aG_1 + bG_2)^3 = a^3 - 3ba^2 + 2b^3$$

$$-K = G_1 + 3G_2$$

$$d = -13$$

Случай 1.11 ($v = 7, f = 8$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_2 - D_3 + D_5, G_2 = D_3 + D_6.$$

$$(aG_1 + bG_2)^3 = -a^3 + 3b^2a$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2$$

$$d = -13$$

1.4 Многообразия с инвариантами ($\rho = 3, \deg = 36, b = 0$)

Случай 1.12 ($v = 8, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_1, G_2 = D_3 + D_5, G_3 = D_2 + D_8.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (3b + 3c)a^2 + 6cba$$

$$-K = 2G_1 + G_2 + G_3$$

$$d = 28$$

Случай 1.13 ($v = 8, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_4 + D_5, G_2 = D_3 + D_7, G_3 = -D_3 + D_4 + D_8.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (3b^2 - 3c^2)a + (3cb^2 - 6c^2b + 3c^3)$$

$$-K = 2G_1 + 3G_2 + G_3$$

$$d = 28$$

Случай 1.14 ($v = 9, f = 11$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_1, G_2 = D_3 + D_5 + D_8, G_3 = -D_5 + D_7 + D_9.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = 3ba^2 + (6cb - 6c^2)a$$

$$-K = 2G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 28$$

Случай 1.15 ($v = 8, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_2 + D_4, G_2 = D_5, G_3 = -D_2 + D_3 + D_7.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = a^3 + (3b + 3c)a^2 + (6cb - 3c^2)a + (-3c^2b + c^3)$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 26$$

Случай 1.16 ($v = 9, f = 11$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_3 + D_4, G_2 = D_1 + D_3 + D_8, G_3 = -D_1 - D_3 + D_7 + D_9.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = 2a^3 + 6ba^2 + (6b^2 - 6c^2)a + (b^3 - 3c^2b + 2c^3)$$

$$-K = 2G_1 + G_2 + G_3$$

$$d = 26$$

1.5 Многообразия с инвариантами ($\rho = 3, \deg = 38, b = 0$)

Случай 1.17 ($v = 7, f = 9$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_1, G_2 = D_2, G_3 = D_5 + D_6.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = a^3 - 3ca^2 + 3c^2a + (b^3 - 3cb^2 + 3c^2b)$$

$$-K = G_1 + G_2 + 3G_3$$

$$d = 24$$

Случай 1.18 ($v = 8, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_2 + D_5, G_2 = -D_1 - D_2 + D_6, G_3 = D_1 + D_7.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = a^3 + (-3b + 3c)a^2 + (-3b^2 + 6cb - 3c^2)a + (-2b^3 + 3cb^2 - 3c^2b + c^3)$$

$$-K = 3G_1 + 3G_2 + 2G_3$$

$$d = 24$$

Случай 1.19 ($v = 7, f = 9$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_1, G_2 = D_4 - D_3, G_3 = D_3 + D_7.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = -a^3 - 3ba^2 + (-3b^2 + 3c^2)a + (-3cb^2 + 3c^2b)$$

$$-K = G_1 + G_2 + 3G_3$$

$$d = 28$$

Случай 1.20 ($v = 8, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = -D_3 + D_4 + D_5, G_2 = D_3 + D_7, G_3 = D_4 + D_8.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (-3b - 3c)a^2 + (3b^2 - 3c^2)a + (3cb^2 - c^3)$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 28$$

Случай 1.21 ($v = 8, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_4 + D_6, G_2 = D_7 - D_4, G_3 = D_2 + D_8.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = 3ca^2 - 3b^2a + (b^3 - c^3)$$

$$-K = 3G_1 + G_2 + 2G_3$$

$$d = 28$$

Случай 1.22 ($v = 9, f = 11$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_3 + D_5, G_2 = D_3 + D_4 + D_6, G_3 = -D_3 + D_7 + D_9.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = 3ba^2 + (6b^2 - 3c^2)a + (2b^3 - 3c^2b + c^3)$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 28$$

Случай 1.23 ($v = 8, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_1, G_2 = D_3 + D_5, G_3 = -D_3 + D_4 + D_6.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (3b^2 + 6cb - 3c^2)a + (3cb^2 + 3c^2b - c^3)$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 22$$

1.6 Многообразия с инвариантами ($\rho = 3, \deg = 42, b = 0$)

Случай 1.24 ($v = 7, f = 9$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_1, G_2 = D_5 - D_2, G_3 = D_2 + D_6.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = a^3 - 3ca^2 + (-3b^2 + 6cb)a + (b^3 - 3cb^2 + 2c^3)$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + 3G_3$$

$$d = 20$$

Случай 1.25 ($v = 8, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_2 - D_4 + D_5, G_2 = D_4 + D_6, G_3 = D_2 + D_8.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = -a^3 - 3ca^2 + 3b^2a + (3cb^2 - 3c^2b + c^3)$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 20$$

Случай 1.26 ($v = 7, f = 9$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_4 - D_3, G_2 = D_5, G_3 = D_3 + D_7.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = -3a^3 + (-6b + 3c)a^2 + (-3b^2 + 6cb)a$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + 4G_3$$

$$d = 22$$

Случай 1.27 ($v = 7, f = 9$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_1, G_2 = D_2, G_3 = D_4 + D_6.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (3b^2 + 6cb)a + (3cb^2 + 3c^2b)$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 22$$

Случай 1.28 ($v = 8, f = 10$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = -D_3 + D_4 + D_5, G_2 = D_3 + D_7, G_3 = D_3 - D_4 + D_8.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = -3a^3 + (3b + 3c)a^2 - 3c^2b$$

$$-K = 4G_1 + 3G_2 + 2G_3$$

$$d = 22$$

1.7 Многообразия с инвариантами ($\rho = 4, \deg = 32, b = 0$)

Случай 1.29 ($v = 9, f = 12$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_3, G_2 = D_5 + D_6, G_3 = -D_1 - D_5 + D_8, G_4 = D_1 + D_5 + D_9.$$

$$\begin{aligned} (aG_1 + bG_2 + cG_3 + dG_4)^3 = & a^3 + (-3b + (3c - 6d))a^2 + \\ & + (3b^2 + (-6c + 12d)b + (-12dc + 12d^2))a + \\ & + ((-6c^2 + 12dc - 6d^2)b + (-6dc^2 + 12d^2c - 6d^3)) \end{aligned}$$

$$-K = 2G_1 + G_2 + G_3 - G_4$$

$$d = -40$$

Случай 1.30 ($v = 9, f = 12$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = D_1, G_2 = D_4 + D_6, G_3 = D_7, G_4 = -D_4 + D_5 + D_8.$$

$$\begin{aligned} (aG_1 + bG_2 + cG_3 + dG_4)^3 = & (6cb + (-3c^2 + 6dc - 6d^2))a + \\ & + ((6dc - 3d^2)b + (-3dc^2 + 6d^2c - 4d^3)) \end{aligned}$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4$$

$$d = -39$$