

Дифференциалы

Часть 1. Кэлеровы дифференциалы

Определение 1.1. Дифференцированием кольца A со значениями в A -модуле M называется гомоморфизм абелевых групп $D : A \rightarrow M$, удовлетворяющий правилу Лейбница

$$D(ab) = aD(b) + bD(a).$$

Если A — алгебра над кольцом R , то дифференцирование называется R -линейным, если $D(r) = 0$ для всех $r \in R$. Множество всех R -линейных дифференцирований $A \rightarrow M$ обозначается $\text{Diff}(A/R, M)$.

Заметим, что всякое дифференцирование \mathbb{Z} -линейно, так как $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1)$, откуда $D(1) = 0$.

Пример 1.2. Всякое k -линейное дифференцирование $D \in \text{Diff}(k[x]/k, M)$ задается формулой $D(f) = df/dx \cdot m_0$, где $m_0 \in M$. В самом деле, пусть $m_0 = D(x)$. Тогда $D(x^2) = 2xD(x)$ и по индукции $D(x^n) = nx^{n-1}D(x)$, откуда в силу линейности вытекает приведенная формула.

Ясно, что если $f : M \rightarrow N$ — гомоморфизм A -модулей, а $D : A \rightarrow M$ — дифференцирование, то $f \circ D : A \rightarrow N$ — тоже дифференцирование. В самом деле $f(D(ab)) = f(aD(b) + bD(a)) = af(D(b)) + bf(D(a))$. В частности, если в качестве f взять умножение на элемент кольца (здесь важна коммутативность кольца!), получится что $\text{Diff}(A/R, M)$ — A -модуль. Аналогично, если $g : B \rightarrow A$ — гомоморфизм R -алгебр, то $D \circ g : B \rightarrow M$ — дифференцирование кольца B .

Теорема 1.3. Для всякой R -алгебры A существует A -модуль $\Omega_{A/R}$ и дифференцирование $d : A \rightarrow \Omega_{A/R}$, обладающее универсальным свойством — сопоставление $(f : \Omega_{A/R} \rightarrow M) \mapsto (f \circ d : A \rightarrow M)$ задает изоморфизм A -модулей

$$\text{Hom}(\Omega_{A/R}, M) \cong \text{Diff}(A/R, M).$$

Доказательство. Умножение задает эпиморфизм колец $A \otimes_R A \rightarrow A$. Обозначим через I идеал, являющийся его ядром. Заметим сразу, что I является A -бимодулем и как левый A -модуль порождается элементами вида $1 \otimes a - a \otimes 1$. В самом деле, пусть $\sum a_i \otimes b_i \in I$ (то есть $\sum a_i b_i = 0$). Тогда

$$\sum a_i \otimes b_i = \sum a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1).$$

Отсюда сразу следует, что идеал I^2 порождается как левый A -модуль элементами $(1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1) = (1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a + ab \otimes 1)$.

Положим $\Omega_{A/R} := I/I^2$, а в качестве отображения d рассмотрим $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$. Во-первых, проверим, что d — дифференцирование. В самом деле

$$\begin{aligned} d(ab) - ad(b) - bd(a) &= 1 \otimes ab - ab \otimes 1 - a(1 \otimes b - b \otimes 1) - b(1 \otimes a - a \otimes 1) = \\ &= 1 \otimes ab - ab \otimes 1 - a \otimes b + ab \otimes 1 - b \otimes a + ab \otimes 1 = (1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1) \equiv 0 \pmod{I^2}. \end{aligned}$$

Кроме того, d — R -линейно, так как $1 \otimes r - r \otimes 1 = 0$ в $A \otimes_R A$. Осталось проверить биективность соответствия.

Пусть $D : A \rightarrow M$ — дифференцирование. Рассмотрим отображение $F^D : A \otimes_R A \rightarrow M$, задаваемое формулой $a \otimes b \mapsto aD(b)$. Оно очевидно является гомоморфизмом, причем $F^D(I^2) = 0$. В самом деле,

$$F^D((1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1)) = F^D(1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a + ab \otimes 1) = D(ab) - aD(b) - bD(a) = 0.$$

Значит F^D индуцирует морфизм $f^D : I/I^2 \rightarrow M$. При этом $f^D(d(a)) = F^D(1 \otimes a - a \otimes 1) = D(a) - aD(1) = D(a)$.

Обратно, если $f : I/I^2 \rightarrow M$ — морфизм, а $D(a) = f(d(a))$, то $F^D(1 \otimes a - a \otimes 1) = D(a) = f(d(a)) = f(1 \otimes a - a \otimes 1)$, то есть $F^D = f$. \square

Часть 2. Вычисление

Вычислим модуль дифференциалов для кольца многочленов.

Лемма 2.1. Пусть R — произвольное кольцо. Тогда $\Omega_{R[x_1, \dots, x_n]/R} \cong R[x_1, \dots, x_n]^{\oplus n}$.

Доказательство. Пусть $A = R[x_1, \dots, x_n]$, тогда $A \otimes_R A = R[x'_1, \dots, x'_n, x''_1, \dots, x''_n]$, а морфизм умножения переводит x'_i и x''_i в x_i . Легко видеть, что идеал I порожден элементами $x'_i - x''_i$, а идеал I^2 — элементами $(x'_i - x''_i)(x'_j - x''_j)$. Рассмотрим гомоморфизм $F^D : I/I^2 \rightarrow A^n$, соответствующий дифференцированию

$$D : A \rightarrow A^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$$

(он переводит образующую $x'_i - x''_i = d(x_i)$ в $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на i -ом месте). Обратное, рассмотрим морфизм $g : A^n \rightarrow I/I^2$, переводящий e_i в $x'_i - x''_i$. Очевидно, что они взаимно обратны. \square

Замечание 2.2. Более инвариантная форма записи данного изоморфизма такова. Пусть V — свободный R -модуль, а $A = S_R^\bullet V^*$ — его симметрическая алгебра. Тогда $\Omega_{A/R} \cong V^* \otimes_R A$, причем универсальное дифференцирование $d : S_R^\bullet V^* \rightarrow V^* \otimes_R S_R^\bullet V^*$ — поляризация многочлена.

Лемма 2.3. Если $S \subset A$ — мультипликативная система, то $\Omega_{S^{-1}A/A} = 0$.

Доказательство. Пусть $D : S^{-1}A \rightarrow M$ — дифференцирование, такое что $D(A) = 0$. Тогда $0 = D(1) = D(s^{-1}s) = s^{-1}D(s) + sD(s^{-1}) = sD(s^{-1})$, значит $D(s^{-1}) = 0$ для всех $s \in S$, следовательно $D \equiv 0$. \square

Лемма 2.4. Пусть A и R' — алгебры над R . Тогда $\Omega_{A \otimes_R R'/R'} = \Omega_{A/R} \otimes_R R'$.

Доказательство. По определению достаточно проверить, что $\text{Diff}(A \otimes_R R'/R', M) \cong \text{Diff}(A/R, M)$ (так как $\text{Hom}_{A \otimes_R R'}(\Omega_{A/R} \otimes_R R', M) \cong \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M)$). Пусть $D : A \rightarrow M$ — дифференцирование. Положим тогда $D'(a \otimes r') = r'D(a)$. Ясно, что это R' -линейное дифференцирование кольца $A \otimes_R R'$. Обратное, если $D' : A \otimes_R R' \rightarrow M$ — дифференцирование, а $i : A \rightarrow A \otimes_R R'$ — естественный гомоморфизм, то $D' \circ i : A \rightarrow M$ — R -линейное дифференцирование, причем построенные соответствия взаимно обратны. \square

Основной способ вычисления дифференциалов — следующая точная последовательность.

Предложение 2.5. Пусть $B = A/J$. Тогда точна последовательность B -модулей

$$(1) \quad J/J^2 \rightarrow \Omega_{A/R} \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/R} \rightarrow 0,$$

где левый морфизм индуцирован композицией $J \rightarrow A \xrightarrow{d} \Omega_{A/R} \rightarrow \Omega_{A/R} \otimes_A B$, а правый — дифференцированием $A \rightarrow B \xrightarrow{d} \Omega_{B/R}$.

Доказательство. Рассмотрим B -модуль M и применим к последовательности функтор $\text{Hom}(-, M)$:

$$0 \rightarrow \text{Diff}(B/R, M) \rightarrow \text{Diff}(A/R, M) \rightarrow \text{Hom}(J/J^2, M)$$

(мы воспользовались тем, что $\text{Hom}_B(\Omega_{A/R} \otimes_A B, M) \cong \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M)$). Нам достаточно проверить ее точность для любого M . Заметим, что первый морфизм задается формулой $D \mapsto D \circ \pi$, где $\pi : A \rightarrow B$ — проекция, и в силу сюръективности π является вложением. Второй морфизм задается формулой $D \mapsto D \circ j$, где $j : J \rightarrow A$ — вложение (заметим, что если $a_1, a_2 \in J$, то $D(j(a_1 a_2)) = D(a_1 a_2) = a_1 D(a_2) + a_2 D(a_1) = 0$, так как M , будучи B -модулем, аннулируется идеалом J , значит $D \circ j$ пропускается через J^2 ; то же рассуждение с $a_1 \in A$, $a_2 \in J$ показывает, что $D \circ j$ — гомоморфизм B -модулей). Пусть теперь $D \circ j = 0$. Значит D индуцирует гомоморфизм абелевых групп $D' : B \rightarrow M$, такой что $D = D' \circ \pi$. Остается заметить, что D' — дифференцирование. \square

Пример 2.6. Пусть $f_1, \dots, f_m \in A = k[x_1, \dots, x_n]$ и $B = A/(f_1, \dots, f_m)$. Найдем $\Omega_{B/k}$. Воспользуемся точной последовательностью (1) и леммой 2.1. Средний член имеет вид B^n , а сюръекции $A^n \xrightarrow{f_1, \dots, f_m} J \twoheadrightarrow J/J^2$ показывают, что образ левого морфизма порожден элементами df_1, df_2, \dots, df_m . Иначе говоря, получаем точную последовательность $B^m \xrightarrow{(\partial f_i / \partial x_j)} B^n \twoheadrightarrow \Omega_{B/R} \twoheadrightarrow 0$.

Есть еще одна важная последовательность — связанная с заменой скаляров.

Предложение 2.7. Пусть $A \rightarrow B \rightarrow C$ — гомоморфизмы колец. Тогда существует точная последовательность C -модулей

$$(2) \quad \Omega_{B/A} \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/A} \rightarrow \Omega_{C/B} \rightarrow 0$$

в которой первый морфизм индуцирован дифференцированием $B \rightarrow C \xrightarrow{d} \Omega_{C/A}$, а второй — дифференцированием $C \xrightarrow{d} \Omega_{C/B}$.

Доказательство. Достаточно проверить точность последовательности

$$0 \rightarrow \text{Diff}(C/B, M) \rightarrow \text{Diff}(C/A, M) \rightarrow \text{Diff}(B/A, M),$$

где M — произвольный C -модуль. Первый морфизм — очевидное вложение (дифференцирования над B также являются дифференцированиями над A), а второй задается формулой $D \mapsto D \circ f$, где $f : B \rightarrow C$. Но если $D \circ f = 0$, то дифференцирование D аннулирует B , а значит является дифференцированием над B . \square

Следствие 2.8. Пусть B_1, B_2 — A -алгебры, а $C = B_1 \otimes_A B_2$. Тогда $\Omega_{C/A} = \Omega_{B_1/A} \otimes_A B_2 \oplus B_1 \otimes_A \Omega_{B_2/A}$.

Доказательство. Имеем точные последовательности

$$\Omega_{B_1/A} \otimes_{B_1} C \rightarrow \Omega_{C/A} \rightarrow \Omega_{C/B_1} \rightarrow 0, \quad \Omega_{B_2/A} \otimes_{B_2} C \rightarrow \Omega_{C/A} \rightarrow \Omega_{C/B_2} \rightarrow 0$$

и изоморфизмы $\Omega_{C/B_1} = \Omega_{B_2/A} \otimes_A B_1 = \Omega_{B_2/A} \otimes_{B_2} C$ и аналогично для Ω_{C/B_2} . Остается проверить, что композиция морфизмов $\Omega_{B_2/A} \otimes_{B_2} C \rightarrow \Omega_{C/A} \rightarrow \Omega_{C/B_1}$ — изоморфизм, что очевидно. \square

Упражнение 1. Пусть K/k — расширение полей. Покажите, что (а) если $K = k(x_1, \dots, x_n)$, то $\Omega_{K/k} = K^n$; (б) если K/k — сепарабельное расширение, то $\Omega_{K/k} = 0$. (с) А если K/k — несепарабельное?

Следствие 2.9. Если A — локализация конечнопорожденной R -алгебры, то $\Omega_{A/R}$ конечно порожден.

Доказательство. По условию $A = S^{-1}B$, где $B = R[x_1, \dots, x_n]/J$. Из (1) следует, что $\Omega_{B/R}$ — фактормодуль свободного модуля конечного ранга, то есть конечно порожден. Далее, рассмотрим цепочку $R \rightarrow B \rightarrow A$. Из (2) получаем точную последовательность $\Omega_{B/R} \otimes A \rightarrow \Omega_{A/R} \rightarrow \Omega_{A/B}$. В ней $\Omega_{A/B} = 0$, значит $\Omega_{A/R}$ — фактормодуль конечнопорожденного модуля $\Omega_{B/R} \otimes_B A$, и значит сам конечно порожден. \square

Часть 3. Пучок дифференциалов

Пусть теперь X — схема над R . Определим пучок дифференциалов на X . Для этого для каждого аффинного подмножества $\text{Spec } A = U \subset X$ рассмотрим пучок на U , соответствующий модулю $\Omega_{A/R}$, а для каждого вложения $\text{Spec } B = V \subset U$ (соответствующего гомоморфизму $A \rightarrow B$) морфизм $\Omega_{A/R} \rightarrow \Omega_{B/R}$, построенный по дифференцированию $A \rightarrow B \xrightarrow{d} \Omega_{B/R}$.

Лемма 3.1. Существует единственный квазикогерентный пучок $\Omega_{X/R}$ на X , такой что для аффинных $\text{Spec } A = U \subset X$ выполнено $\Omega_{X/R}(U) = \Omega_{A/R}$, а морфизмы ограничения для аффинных вложений такие же как и выше.

Доказательство. Прямолинейный способ состоит в том, что на каждой из аффинных карт рассмотреть квазикогерентный пучок, соответствующий модулю дифференциалов, и склеить из них квазикогерентный пучок на всем X (иначе говоря, для каждой схемной точки $x \in X$ рассмотреть модуль $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/R}$ и каждому $U \subset X$ сопоставить множество всех $\{s_x \in \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/R}\}_{x \in U}$, которые локально происходят из элементов модуля дифференциалов). Но мы применим другой способ.

Предположим вначале, что схема X отделима (то есть диагональное вложение $\Delta : X \rightarrow X \times X$ является замкнутым сложением). Пусть $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X \times X}$ — пучок идеалов диагонали. Рассмотрим пучок $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. Заметим, что он аннулируется умножением на \mathcal{I} , следовательно является пучком $\mathcal{O}_{X \times X}/\mathcal{I}$ -модулей, то есть его можно рассматривать как пучок на диагонали. Определим пучок $\Omega_{X/R}$ равенством

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \Delta_* \Omega_{X/R}.$$

Проверим, что построенный пучок локально устроен как модуль дифференциалов. Если $U = \text{Spec } A \subset X$, то $U \times U \subset X \times X$ и диагональное вложение соответствует морфизму умножения $A \otimes A \rightarrow A$, поэтому пучок

\mathcal{I} соответствует идеалу I из теоремы 1.3. Значит пучок $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ соответствует модулю $I/I^2 = \Omega_{A/R}$, что и требовалось.

Если же схема X не является отделимой, то диагональ не замкнута, но зато локально замкнута, то есть замкнута в некотором открытом подмножестве $V \subset X \times X$. Поэтому можно проделать все те же рассуждения, что и раньше, заменив $X \times X$ на V . \square

Упражнение 2. Покажите, что локальные дифференцирования $d : A \rightarrow \Omega_{A/R}$ склеиваются в глобальный морфизм пучков $d : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/R}$. Заметьте, что он **не является морфизмом пучков \mathcal{O}_X -модулей!**

Лемма 3.2. $\Omega_{X/R} = \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) = \Delta^*\mathcal{I}$.

Доказательство. Первое равенство очевидно ввиду следующего общего факта. Второе получается так. Применяя функтор Δ^* к точной последовательности $0 \rightarrow \mathcal{I}^2 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \rightarrow 0$, получаем

$$\Delta^*(\mathcal{I}^2) \rightarrow \Delta^*\mathcal{I} \rightarrow \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \rightarrow 0.$$

Остается заметить, что локально первый морфизм соответствует морфизму $I^2 \otimes_A (A/I) \rightarrow I \otimes_A (A/I)$, который очевидно равен нулю. Значит второй морфизм — изоморфизм. \square

Лемма 3.3. Пусть $i : Y \rightarrow X$ — замкнутое вложение, а \mathcal{J} — пучок идеалов Y в X . Тогда функтор $i_* : \text{Qcoh}(Y) \rightarrow \text{Qcoh}(X)$ — эквивалентность на подкатегорию пучков, аннулируемых пучком идеалов \mathcal{J} . Обратный функтор — i^* .

Доказательство. Во-первых, проверим, что $i^*i_*F \cong F$ для всякого $F \in \text{Qcoh}(Y)$. Для этого заметим, что по сопряженности $\text{Hom}(i^*i_*F, F) \cong \text{Hom}(i_*F, i_*F)$, значит существует канонический морфизм $i^*i_*F \rightarrow F$ и нам достаточно проверить, что он является изоморфизмом. Это вопрос локальный, так что можно считать, что $X = \text{Spec } A$ — аффинно, \mathcal{J} соответствует идеалу $J \subset A$, а $Y = \text{Spec}(A/J)$. Тогда функтор i_* — это естественный функтор $\text{Mod}(A/J) \rightarrow \text{Mod}A$, а функтор i^* — это функтор $-\otimes_A (A/J) : \text{Mod}A \rightarrow \text{Mod}(A/J)$. В частности, если M — A/J -модуль, соответствующий пучку F , то пучку i^*i_*F соответствует модуль $M \otimes_A (A/J)$, а наш морфизм $M \otimes_A (A/J) \rightarrow M$ индуцирован действием A/J на M . Остается заметить, что это — изоморфизм, так как J действует на M тривиально.

Обратно, для всякого пучка G на X есть естественный морфизм $G \rightarrow i_*i^*G$, который локально соответствует естественному морфизму $N \rightarrow N \otimes_A (A/J)$ для A -модуля N . Ясно, что он изоморфизм в точности для тех N , которые аннулируются идеалом J , так что i_* — эквивалентность на подкатегорию пучков, которые аннулируются идеалом \mathcal{J} . \square

Аналогично определяется пучок относительных дифференциалов. Пусть X — схема над S . Рассмотрим диагональ в расслоенном квадрате $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$ и положим $\Omega_{X/S} = \Delta^*\mathcal{I}$, где \mathcal{I} — пучок идеалов диагонали, если X отделима над S , а если не отделима, то аналогично заменив расслоенный квадрат на открытое подмножество, в котором диагональ замкнута. Ясно, что если $\text{Spec } A \subset X$, $\text{Spec } R \subset S$ — аффинные открытые подмножества, такие что $\pi(\text{Spec } A) \subset \text{Spec } R$, где $\pi : X \rightarrow S$ (так что A — R -алгебра), то $\Omega_{X/S}$ над $\text{Spec } A$ соответствует модулю $\Omega_{A/R}$.

Ясно, что если X — схема над кольцом R , то $\Omega_{X/R} = \Omega_{X/\text{Spec } R}$.

Лемма 3.4. Пучок дифференциалов $\Omega_{X/S}$ конечно порожден. В частности, если X — локально нетерова, то $\Omega_{X/S}$ когерентен.

Эта лемма сразу следует из 2.9.

Часть 4. Дифференциалы на проективном пространстве

Начнем с инвариантного вычисления для аффинного пространства.

Упражнение 3. Покажите, что если V — векторное пространство, то $\Omega_{\mathbb{A}(V)} \cong V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}(V)}$.

Упражнение 4. Покажите, что если E — векторное расслоение на S , а $X = \text{Tot}_S(E) = \text{Spec}_S(S^\bullet E^*)$, то $\Omega_{X/S} \cong \pi^*E^*$, где $\pi : X \rightarrow S$ — естественная проекция.

Теорема 4.1. Пусть W — векторное пространство над k размерности n . Тогда существует точная последовательность

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}(W)} \rightarrow W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \rightarrow 0, \quad (\text{последовательность Эйлера})$$

в которой правый морфизм индуцирован естественным отображением $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$.

Доказательство. Обозначим ядро отображения $\alpha : W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ через K (если рассматривать $\mathbb{P}(W)$ как грассманиан $\text{Gr}(1, W)$, то это расслоение \mathcal{U}^\perp). Получим морфизм $\beta : K \rightarrow W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}$. Поднимем α и β на $\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(W)$ и прокомпонируем — получим морфизм

$$\varphi : p_1^* K \xrightarrow{p_1^* \beta} W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(W)} \xrightarrow{p_2^* \alpha} p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1).$$

Покажем, что $Z_\varphi = \Delta(\mathbb{P}(W))$. В самом деле, чтобы проверить, что $Z_\varphi \subset \Delta(\mathbb{P}(W))$ надо убедиться в том, что $p_{1|Z_\varphi} = p_{2|Z_\varphi}$. Для этого заметим, что эти отображения определяются ограничениями морфизмов $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(W)} \rightarrow p_i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ на Z_φ . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & p_1^* K|_{Z_\varphi} & \xrightarrow{p_1^* \beta} & W^* \otimes \mathcal{O}_{Z_\varphi} & \xrightarrow{p_1^* \alpha} & p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)|_{Z_\varphi} \longrightarrow 0 \\ & & \searrow \varphi|_{Z_\varphi} & & \downarrow p_2^* \beta & \swarrow & \\ & & & & p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)|_{Z_\varphi} & & \end{array}$$

Так как $\varphi|_{Z_\varphi} = 0$, получаем пунктирную стрелку, которая должна быть сюръективна в силу сюръективности вертикальной стрелки. Но заметим, что сюръективный морфизм локально свободных пучков одинакового ранга — изоморфизм. В самом деле, у него постоянный ранг, значит по лемме из первой лекции его ядро — локально свободно ранга ноль, значит равно нулю. Таким образом, пунктирная стрелка — изоморфизм, что и означает равенство отображений $p_{1|Z_\varphi} = p_{2|Z_\varphi}$.

Чтобы построить обратный морфизм, заметим, что при диагональном вложении $\Delta : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(W)$ имеем $\Delta^* \varphi = \alpha \circ \beta = 0$, значит Δ пропускается через Z_φ .

Итак, $Z_\varphi = \Delta(\mathbb{P}(W))$. Вспоминая определение схемы нулей, получаем сюръекцию $K \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \rightarrow \mathcal{I}$. Применяя функтор Δ^* получаем эпиморфизм $\Delta^*(K \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)) = K(-1) \rightarrow \Delta^* \mathcal{I} = \Omega_{\mathbb{P}(W)}$. Но и $K(-1)$ и $\Omega_{\mathbb{P}(W)}$ являются локально свободными пучками ранга $n - 1$ (для первого это верно по определению, а для второго следует из того, что проективное пространство покрывается аффинными пространствами, а на аффинном пространстве пучок дифференциалов локально свободен), значит этот морфизм — изоморфизм. Теперь вспоминая определение пучка K , получаем искомую точную последовательность. \square

Упражнение 5. Проверьте, что для грассманиана $\text{Gr}(k, W)$

- (а) существует эпиморфизм $U^\perp \boxtimes U \rightarrow \mathcal{I}$, где \mathcal{I} — пучок идеалов диагонали;
- (б) он индуцирует изоморфизм $\Omega_{\text{Gr}(k, W)} \cong U^\perp \otimes \mathcal{U}$.

Упражнение 6. Пусть E — векторное расслоение на S . Проверьте, что (а) $\Omega_{\text{Gr}_S(k, E)/S} \cong U^\perp \otimes \mathcal{U}$;

- (б) на $\mathbb{P}_S(E)$ существует точная тройка

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_S(E)/S} \rightarrow \pi^* E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S(E)/S}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S(E)} \rightarrow 0,$$

где $\pi : \mathbb{P}_S(E) \rightarrow S$ — проекция.