

# ГЕОМЕТРИЯ ТВИСТОРОВ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

А. Г. Сергеев

*Краткая аннотация:*

Главной темой лекций является изложение основ теории твисторов и их приложений к решению уравнений калибровочной теории поля, таких как автодуальные уравнения Янга–Миллса.

Первая часть курса, посвященная теории твисторов, открывается построением твисторной модели пространства Минковского. Затем мы переходим к исследованию твисторного соответствия, сопоставляющего геометрическим объектам в пространстве Минковского их образы в пространстве твисторов. Отдельный интерес представляет клейнова интерпретация пространства Минковского, при которой это пространство отождествляется с квадрикой в 5-мерном комплексном проективном пространстве  $\mathbb{C}P^5$ .

Во второй части курса теория твисторов применяется к исследованию уравнений калибровочной теории поля. В качестве первого примера мы рассматриваем уравнения дуальности Янга–Миллса на евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^4$  и их решения, называемые инстантонами. Теорема Атьи–Уорда дает твисторную интерпретацию инстантонов, а основанная на ней ADHM-конструкция, предложенная Атьей, Дринфельдом, Хитчином и Маниным, позволяет полностью описать пространство модулей инстантонов. Следующим примером служат уравнения монополей в  $\mathbb{R}^3$ , называемые иначе уравнениями Богомольного. Их твисторная интерпретация была предложена Намом.

Третья часть курса посвящена двумерным моделям. Она начинается с исследования уравнений Янга–Миллса–Хиггса в  $\mathbb{R}^2$ . Пространство модулей решений автодуальных уравнений Янга–Миллса–Хиггса полностью описывается теоремой Таубса. Особый интерес представляют уравнения Хитчина на римановых поверхностях, тесно связанные с расслоениями Хиггса. В заключение мы обращаемся к сигма-моделям или, пользуясь математической терминологией, гармоническим отображениям. Для их описания также естественно использовать твисторный язык.

Все указанные уравнения дуальности имеют глубокий физический смысл, а их исследование представляет несомненный интерес как с точки зрения физики, так и математики.

## ПРОГРАММА КУРСА

### 1. ТВИСТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

#### 1.1. Твисторная модель пространства Минковского

1.1.1. Пространство Минковского

1.1.2. Спинорная модель пространства Минковского

1.1.3. Твисторная модель пространства Минковского

#### 1.2. Твисторное соответствие

1.2.1. Твисторное соответствие в случае комплексного пространства Минковского

1.2.2. Твисторное соответствие в случае вещественного пространства Минковского

- 1.2.3. Твисторное соответствие в случае евклидова пространства
  - 1.2.4. Клейнова модель пространства Минковского
  - 1.2.5. Твисторные расслоения
2. ПОЛЯ ЯНГА-МИЛЛСА И МОНОПОЛИ
- 2.1. Инстантоны и поля Янга–Миллса
    - 2.1.1. Уравнения Янга–Миллса
    - 2.1.2. Инстантоны
    - 2.1.3. Поля Янга–Миллса на  $\mathbf{R}^4$
  - 2.2. Теорема Атьи-Уорда и ADHM-конструкция
    - 2.2.1. Теорема Атьи–Уорда
    - 2.2.2. ADHM-конструкция
  - 2.3. Монополи и уравнения Нама
    - 2.3.1. Уравнения Богомольного
    - 2.3.2. Примеры монополей
    - 2.3.3. Конструкция Нама–Хитчина
3. ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ
- 3.1. Двумерная модель Янга–Миллса–Хиггса
    - 3.1.1. Уравнения Янга–Миллса–Хиггса на  $\mathbf{R}^2$
    - 3.1.2. Теоремы Таубса
  - 3.2. Расслоения Хиггса и уравнения Хитчина
    - 3.2.1. Уравнения Хитчина
    - 3.2.2. Расслоение Хиггса
    - 3.2.3. Пространства модулей расслоений Хиггса
    - 3.2.4. Соответствие Хитчина–Кобаяши
  - 3.3. Гармонические отображения и сигма-модели
    - 3.3.1. Гармонические отображения
    - 3.3.2. Пример: гармонические отображения римановой сферы в себя
    - 3.3.3. Твисторная интерпретация гармонических отображений
    - 3.3.4. Гипотеза о гармонических сферах