Семинар «Представления и вероятность»

А. И. Буфетов, А. В. Дымов, А. В. Клименко, Г. И. Ольшанский

Теория представлений и теория вероятностей нечасто сопрягаются вместе в головах математиков. Однако между этими двумя большими науками имеются плодотворные связи, которые явственно проявились в последние годы. Цель нашего семинара (его можно назвать и спецкурсом) — рассказать о них подробно.

Осенний семестр 2017 г. будет посвящён в основном следующим двум темам.

Стохастические дифференциальные уравнения

Как известно, многие физические системы моделируются дифференциальными уравнениями, сохраняющими энергию. За долгие годы исследований математики нашли множество замечательных свойств различных классов таких систем. Однако полностью изолированных систем практически не бывает и обыкновенно на систему воздействует некоторый малый шум, который в уравнениях не учитывается. Простейший (и грубейший) способ его смоделировать – добавить в уравнения некоторое случайное возмущение, так что уравнения становятся стохастическими дифференциальными уравнениями. Даже малое такое возмущение рушит многие свойства исходной системы (например, сохранение энергии), но вместо этого придает ей новые свойства, иногда позволяющие получить про ее динамику даже больше информации, нежели было известно про динамику исходной системы, открывая тем самым новую широкую область исследования. В первой части курса мы обсудим эти вопросы на примере дифференциальных уравнений, возникающих в неравновесной статистической механике и используемых при исследовании одной из ее центральных нерешенных задач, связанной с изучением переноса тепла в твердых телах.

Мы покажем, что при стохастическом возмущении в системе появляются сильные эргодические свойства, позволяющие исследовать ее поведение, когда время стремится к бесконечности. Центральную роль в нашем изложении будут играть красивые абстрактные результаты из теории меры, заслуживающие отдельного внимания.

Далее, если останется время, мы затронем вопрос о том, как ведет себя энергия системы (которая теперь не сохраняется), когда случайное возмущение асимптотически мало. Оказывается, он тесно связан с теорией стохастического усреднения, разработанной Хасьминским, а затем Вентцелем и Фрейдлиным. Затем мы объясним, что все это значит с точки зрения статистической механики.

Для понимания этой части курса не потребуются никакие знания ни о статистической механике, ни о стохастических дифференциальных уравнениях, необходимая база будет объяснена в процессе.

Эргодическая теория групповых действий марковских групп

Классические результаты эргодической теории относятся к случаю действия сохраняющего меру отображения на вероятностном пространстве. Возникает естественный вопрос об аналогах этой теории для *нескольких* отображений. Более точно, можно рассматривать действия группы или полугруппы на вероятностном пространстве сохраняющими меру преобразованиями. Мы будем заниматься конечно порождёнными группами, в которых набор образующих (который мы предполагаем фиксированным) определяет норму элемента — длину самого короткого произведения образующих, определяющего этот элемент. Аналог средних из классических эргодических теорем строится теперь в два шага: сначала определяются *средние* $S_n(\varphi)$ *по сфере* от функции $\varphi \in L^1(X,\mu)$, равные среднему арифметическому функций $\varphi \circ T_g$ для всех g с нормой n, а затем последовательность $S_n(\varphi)$ *усредняется по Чезаро*: $C_n(\varphi) = (S_0(\varphi) + \cdots + S_{n-1}(\varphi)/n$.

Свойства групповых действий определяются в первую очередь свойствами действующей группы. Имеется большой класс *аменабельных* групп, на действия которых во многом переносится теория действий группы $\mathbb{Z}$, соответствующей действию одного отображения. В частности, для таких групп имеет место сходимость чезаровских средних $C_n(\varphi)$.

Нас же будет в первую очередь интересовать случай «наиболее далёкий от аменабельности» — действия свободных и близких к ним групп (таких классов групп довольно много, это, в частности, гиперболические в смысле Громова группы и обобщающие их марковские группы). Например, мы покажем, что кроме привычной сходимости чезаровских средних C_n здесь при определённых условиях имеет место и сходимость самих сферических средних S_n.

Для понимания этой части потребуются лишь элементарные знания по теории меры и теории вероятностей.