

Лекция 4 (5 октября)
Автоморфные функции и их обращение; кристоффелиан.

Пуанкаре, в начале своей деятельности очень плохо знавший обстановку в Германии, называл группы с предельными окружностями "фуксовыми", хотя Фукс никаких заслуг в этой области не имел. Когда я обратил его внимание на общие функции этого рода, он стал называть их "клеиновскими". Таким образом, по части истории здесь царит невероятная путаница. В Германии мало-помалу получило всеобщую поддержку моё предложение отказаться от всяких терминов персонального характера и называть эти функции "автоморфными".

Ф. Клейн

4.0. Введение. Нашей ближайшей целью является определение *римановой поверхности* роста аналитической функции. Неформально, это – "истинная" область определения аналитической функции, наибольшее множество, на которое функция может быть продолжена *переразложением* сходящихся степенных рядов; формальное определение будет дано в следующей лекции.

Риманову поверхность произвольного роста аналитической функции далеко не всегда удаётся представить себе в виде наглядного образа; в общем случае лучшее, на что можно рассчитывать – это на картину *графика многозначного соответствия*. Однако для широкого класса функций, содержащего элементарные и многие другие, возможна гораздо более ясная картина. Именно этому классу функций – грубо говоря, обратным к периодическим и квазипериодическим – и посвящена сегодняшняя лекция.

Материал, излагаемый в этой лекции, является стандартным, однако термин *крмстоффелиан* (с соответствующими объяснениями) вводится

здесь впервые, а само понятие является модификацией известного – функция заменяется на дифференциал.

4.1. Два примера. Рассмотрим два степенных ряда, сходящихся при $|z| < 1$:

$$-\log(1 - z) := z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \quad (4.1.1)$$

и

$$\begin{aligned} \sqrt{1+z} &:= 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}z^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}z^3 \pm \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 - \frac{5}{128}z^4 + \frac{7}{256}z^5 - \frac{21}{1024}z^6 \pm \dots = \\ &= 1 + \frac{z}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4}z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}z^4 \pm \dots \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Эти две элементарные функции, рассматриваемые в комплексной области, доставляют простейшие примеры ростков аналитических функций, допускающих нетривиальное (многозначное) аналитическое продолжение за пределы своего круга сходимости.

Начинать изучение этих функций лучше всего с геометрических представлений – подобно тому, как в вещественном анализе рекомендуется прежде всего представить себе график функции. В данном случае картины комплексных "графиков" непросты – это и есть интересующие нас *римановы поверхности*, однако задача облегчается тем, что *обратные* к рассматриваемым функции, определённые на всей комплексной плоскости, ведут себя просто и понятно.

Действительно, поменяв ролями "оси" первого из "графиков", мы перепишем $w = -\log(1 - z)$ как

$$z = 1 - e^{-w}, \quad (4.1.3)$$

и оказывается, что с точностью до сдвигов и центральных симметрий отображение $w \mapsto z$ представляет собой "скручивание w -плоскости в трубочку, а $z \mapsto w$, стало быть – обратное многозначное отображение. Обратим внимание на то, что точка $z = 1$, лежащая на границе круга сходимости ряда (1.4.1), (в ней ряд расходится как гармонический) не участвует в игре.

Смена ролей осей второго из "графиков" приводит к переписыванию $w = \sqrt{1+z}$ в виде

$$z = w^2 - 1, \quad (4.1.4)$$

который показывает, что и в этом случае отображение $w \mapsto z$ имеет простой геометрический смысл.

Прямое рассмотрение аналитических продолжений (*переразложений*) рассматриваемых функций также возможно, но требует больших усилий; см. задачи 4.1 и 4.2.

4.2. Элементарные функции как обращения интегралов. Оставим $\sqrt{1+z}$ (римановым поверхностям алгебраических функций будут посвящены лекции ???) и рассмотрим интегральные представления той же $z \mapsto -\log(1-z)$ и ещё одной элементарной функций:

$$-\log(1-z) := \int_0^z \frac{dz}{1-z}, \quad (4.2.1)$$

$$\operatorname{arctg} z := \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}; \quad (4.2.2)$$

многозначность этих функций скрыта, разумеется, в *путях интегрирования* от 0 до z .

В комплексной области логарифм мало отличается от арктангенса: имеет место тождество

$$\frac{2}{1+z^2} \equiv \frac{i}{z+i} - \frac{i}{z-i}, \quad (4.2.3)$$

в силу которого формула (4.2.2) может быть переписана в виде

$$\operatorname{arctg} z := \frac{i}{2} \int_0^z \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right) dz. \quad (4.2.4)$$

В аналогичной форме может быть представлен и арксинус – см. задачу 4.3.

Таким образом, элементарные функции побуждают нас рассмотреть в

комплексной области общие интегралы вида

$$I(z) := \int_{z_0}^z \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - A_i} dz; \quad (4.2.4)$$

в соответствии с терминологией, введённой в начале лекции 2, такие интегралы следует называть *интегралами третьего рода* на римановой сфере.

С точки зрения символического (=неопределённого) интегрирования они интереса не представляют: например, в вещественной области в самом общем виде

$$I(z) = \text{Const} + \log \prod_{i=1}^n [(z - A_i)^{c_i}]. \quad (4.2.5)$$

Однако в комплексной области сочетание в этой формуле логарифма и степенных функций с произвольными (комплексными) показателями делает эту функцию (с параметрами $A_1, \dots, A_n; c_1, \dots, c_n$) многозначной и сложной для изучения. Ниже в этой лекции мы проясним её геометрический смысл.

4.3. Обращение интегралов алгебраических функций. Классики придавали огромное значение обобщению, скажем, определения синуса через функцию, обратную интегралу алгебраической функции: синус может быть определён тождеством

$$z \equiv \int_0^{\sin z} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (4.3.0)$$

Одно из таких обобщений – введение Фаньяно и Эйлером *лемнискатического синуса*, который в современной литературе (см. [Маркушевич1974]) обозначается sl, (Гаусс обозначал его sinlemn) определяется тождеством

$$z \equiv \int_0^{\text{sl}z} \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}. \quad (4.3.1)$$

Лемнискатический синус – *однозначная* (двойкопериодическая мероморфная) функция; этот неочевидный результат будет нами получен в лекции ?? современными средствами. Дальнейшие обобщения этих понятий и связанных с ними результатов также будут излагаться на современном

языке.

Отметим, что интеграл (4.3.1) – *неполный* (имеет переменный верхний предел); в предыдущей же лекции мы обсуждали вычисление *полных* интегралов.

4.4. Квазипериодические функции. Сменим теперь точку зрения на *противоположную*: будем рассматривать экспоненту вместо логарифма, синус вместо арксинуса и т.п. Функции, которыми мы занимаемся, станут однозначными; это в некотором смысле означает возвращение из курса по *римановым поверхностям* в *тфкп*. Однако, даже только обращая интегралы алгебраических функций, мы встретимся с классами функций, которые обычно в современных курсах тфкп не рассматриваются.

В случае обращения элементарных многозначных функций приращения значений при обходах точек ветвления превращаются в известные свойства *периодичности* функций, такие, как

$$\sin(z + 2\pi) \equiv \sin z \quad (4.4.1)$$

или

$$e^{z+2\pi i} \equiv e^z. \quad (4.4.2)$$

Для наших целей потребуется расширение этого понятия. Комплексную плоскость \mathbb{C} (область определения синуса и экспоненты) мы заменим на произвольную область $D \subseteq \mathbb{C}$, а группу \mathbb{Z} преобразований плоскости, реализованную как группу сдвигов $z \mapsto z + 2\pi$ и $z \mapsto z + 2\pi i$ – на произвольную *дискретную* подгруппу

$$\Gamma \subset \text{Aut}D; \quad (4.4.3)$$

здесь $\text{Aut}D$ – полная группа *биголоморфных* (=конформных, сохраняющих ориентацию) отображений области D в себя; в силу стандартных результатов тфкп вещественная размерность этой группы не превосходит 4.

Основные примеры пар (D, Γ) – это

- $(\mathbb{C}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ действует на \mathbb{C} *сдвигами на решётку*, т.е. преобразованиями $z \mapsto z + m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$, в которых $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, а

λ_1, λ_2 – ненулевые комплексные числа с не вещественным отношением,

и

• $(\mathcal{H}, \text{PSL}_2(\mathbb{Z}))$, где $\mathcal{H} := \{\tau \in \mathbb{C} | \text{Im}(\tau) > 0\}$ – верхняя полуплоскость, а

$$\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) := \frac{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}{\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}} = \frac{\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}}{\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}; \quad (4.4.4)$$

группа $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ действует на \mathcal{H} дробно-линейными преобразованиями $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, коэффициенты которого определены с точностью до знака. Часто вместо группы $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ рассматриваются её подгруппы конечного индекса.

При заданных D и Γ мероморфная функция $f \in \mathcal{M}[D]$ будет "называться" квазипериодической, если имеется система достаточно простых функций $a_\gamma, b_\gamma \in \mathcal{O}[D]$ для всех $\gamma \in \Gamma$, что

$$f(\gamma \cdot z) \equiv a_\gamma(z)f(z) + b_\gamma(z). \quad (4.4.5)$$

Разумеется, это – не математическое определение, поскольку мы не даём определения простых функций; однако приведённая формулировка позволит нам без колебаний относить некоторые функции к квазипериодическим, как только для них будут выполняться соотношения вида (4.4.6). Обычно функции a_γ и b_γ – константы, линейные функции или экспоненты линейных функций.

4.5. Конформные эквивалентности многоугольников. Мы рассмотрим класс аналитических функций, имеющих прозрачный геометрический смысл: их элементы будут задавать конформные эквивалентности многоугольников на комплексной плоскости.

Многоугольник мы будем понимать чуть-чуть шире, чем в школьной математике; мы будем называть многоугольником непустое собственное связное односвязное открытое подмножество комплексной плоскости, ограниченное конечным количеством отрезков, лучей и прямых;

такое представление неоднозначно, и n -угольником будет называться многоугольник, для которого n – минимально возможное такое количество. Так, 1-угольники – это полуплоскость и дополнение к замкнутому лучу, а 2-угольники – внутренности углов и полосы.

Очевидным образом определяются *вершины* многоугольника и *углы* в них, лежащие между 0 и 2π .

Неограниченный многоугольник называется также *несобственным*; у него есть вершина в бесконечности, угол в которой определяется с помощью стереографической проекции на сферу Римана; этот угол может оказаться нулевым.

Согласно теореме Римана, все многоугольники, будучи связными односвязными областями в \mathbb{C} , конформно эквивалентны друг другу и, в частности, верхней полуплоскости \mathcal{H} ; именно явным видом последней конформной эквивалентности мы и займёмся.

Итак, мы ищем однолистные функции

$$z : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C},$$

отображающие верхнюю полуплоскость \mathcal{H} на многоугольники; согласно геометрической теории функций, каждое такое отображение z непрерывно продолжается на границу области \mathcal{H} , т.е. на $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, и соответствующее продолжение мы тоже будем обозначать

$$z : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C});$$

образ $z(\mathbb{P}_1(\mathbb{R}))$ – ломаная, ограничивающая многоугольник. В случае несобственного многоугольника она содержит бесконечную вершину.

Обозначим z -прообразы вершин многоугольника через $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$; традиционно предполагается, что вершины и их прообразы нумеруются в соответствии с циклическим порядком обхода по границе многоугольника, но для дальнейшего это несущественно.

Обозначим $\pi\alpha_1, \dots, \pi\alpha_n$ углы при вершинах $z(A_1), \dots, z(A_n)$. Согласно (разумному) определению угла,

$$0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq 2; \tag{4.5.1}$$

как известно,

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = n - 2. \quad (4.5.2)$$

(Эта формула должна быть уточнена при $n = 1$ и $n = 2$. Кроме того, угол в бесконечности должен браться с правильным знаком).

Обозначим $\text{Conf}(A_1, \dots, A_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ множество конформных отображений с указанными параметрами. Это множество, очевидно, является вещественным алгебраическим многообразием с краем; его вещественная размерность в силу (4.5.2) равна

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Conf}(A_1, \dots, A_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 2n - 1. \quad (4.5.3)$$

С другой стороны, обозначив группу преобразований подобия комплексной плоскости

$$\text{Aff}_1(\mathbb{C}) := \{z \mapsto Kz + B \mid (K, B) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}\}, \quad (4.5.4)$$

заметим, что множество *классов подобия n -угольников* представляет собой множество упорядоченных вершин многоугольника, отфакторизованное по действию группы $\text{Aff}_1(\mathbb{C})$, так что

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \frac{\{\text{вершины } z_1, \dots, z_n\}}{\text{Aff}_1(\mathbb{C})} &= 2 \dim_{\mathbb{C}} \frac{\{\text{вершины } z_1, \dots, z_n\}}{\text{Aff}_1(\mathbb{C})} = \\ &= 2(n - 2) = 2n - 4. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Различие размерностей на 3 объясняется тем, что геометрия образа верхней полуплоскости $z(\mathcal{H})$ определяется не самой функцией z , а её классом эквивалентности под действием группы

$$\text{SL}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

на аргументы преобразованиями $t \mapsto \frac{dt-b}{-ct+a}$. Итак, в целом нас интересует множество голоморфных на верхней полуплоскости однолистных функций $t \mapsto z(t)$ по модулю отношения эквивалентности, определяемого действием вещественной 7-параметрической группы, согласно которому

$$[t \mapsto z(t)] \sim [t \mapsto Kz\left(\frac{dt-b}{-ct+a}\right) + B]. \quad (4.5.6)$$

4.6. Кристоффелиан. Действие группы преобразований подобия "убивается" переходом от функции z к функции $\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}$. Заметим, что новая функция голоморфна на \mathcal{H} в силу однолистности функции z .

Теорема. Если z – однолистная функция, определённая в предыдущих разделах, а $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}$, то $\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}$ продолжается до рациональной функции на всей t -плоскости и имеет вид

$$\frac{\ddot{z}(t)}{\dot{z}(t)} = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 1}{t - A_j}.$$

Если одна из точек $\{A_1, \dots, A_n\}$ лежит в бесконечности, то соответствующее ей слагаемое из-под знака суммы выбрасывается.

Эта теорема доказывается во многих стандартных учебниках, см., например, [ГурвицКурант1968].

4.7. Интегралы Кристоффеля-Шварца.

+++++

Задачи

4.1. Введите в рассмотрение какую-нибудь замкнутую кривую, обходящую (как это принято, *против* часовой стрелки) особую точку $z = 1$ ряда (4.1.1) для функции $z \mapsto -\log(1 - z)$. Покройте эту кривую кругами *небольших* радиусов – таких, что *переразложения*, т.е. тождественные равенства сходящихся рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}(z - a_m)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+1,n}(z - a_{m+1})^n,$$

имеют место для всех пар соседних кругов; здесь $0 \leq m \leq M$, причём $a_0 = a_M = 0$ и $c_{0,0} = 0$, $c_{0,n} = \frac{1}{n}$ при $n > 0$. Цель исследования – определение последнего ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_{M,n}z^n$.

4.2 Сформулируйте и решите задачу, аналогичную 4.1, для ряда (4.1.2), в который разлагается функция $z \mapsto \sqrt{1 + z}$.

4.3. Воспользовавшись рациональной параметризацией коники, постройте интегральное представление арксинуса в комплексной области.

4.4. Докажите (в удобных для вас предположениях) формулу Фаньяно

$$\int_0^{\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2 \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Выпишите несколько первых членов разложений обеих частей формулы в ряды по u .

4.5. Выразите решение уравнения колебания маятника

$$\ddot{x} = a \sin x$$

в виде неполного эллиптического интеграла первого рода.

4.6. Для $k = 2, 3, 4, \dots$ рядами Эйзенштейна называются голоморфные функции $G_k \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$, задаваемые формулами

$$G_k(\tau) := \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}}.$$

Проверьте сходимость этих рядов и изучите их квазипериодические свойства относительно группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Подсказка. Эта группа порождена преобразованиями $\tau \mapsto \tau + 1$ и $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$.

4.7. Перечислите конформные эквивалентности многоугольников, задаваемые элементарными функциями.