09.8.7 / 09.10.7

Лекция 1 (14 сентября 2009) Ньютон и эллиптические кривые (I).

1.0. План. Реальной историей математики мы всё-таки заниматься не будем хотя бы по причине недостатка времени.

Вместо этого мы в сегодняшней и в следующей лекции с современных позиций обсудим три (связанные между собой) задачи, которыми занимался Исаак Ньютон:

• интегрирование уравнений Кеплера;
• вычисление длины дуги эллипса;
• классификация плоских кубических кривых.

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА

Люблю обычные слова,
Как неизведанные страны.
Они понятны лишь сперва,
Потом значения их туманны.
Их протирают, как стекло.
И в этом наше ремесло.

Д. Самойлов

1.1. Уравнения Кеплера. Опуская физические рассмотрения, напомним, что, согласно Кеплеру-Ньютону, плоское движение планеты (например, Земли) в поле тяготения Солнца в естественной системе координат (с центром в Солнце) описывается парой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\gamma \dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \mathbf{(1.1.1)} \\ \ddot{y} = -\gamma \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \mathbf{(1.1.2)} \end{cases}$$

В Солнечной системе

$$\gamma = Gm_{\odot} \approx 1.327 \cdot 10^{20} \frac{\text{м}^3}{\text{сек}^2}.$$

1.2. Круговые решения. Бросается в глаза двупараметрическое семейство решений уравнений Кеплера

$$x(t) = r_0 \cos \frac{\sqrt{\gamma}(t - t_0)}{r_0^{\frac{3}{2}}},\ y(t) = r_0 \sin \frac{\sqrt{\gamma}(t - t_0)}{r_0^{\frac{3}{2}}}.$$

Иначе эти решения можно записать в виде

$$x(t) = r_0 \cos \frac{2\pi(t - t_0)}{T},\ y(t) = r_0 \sin \frac{2\pi(t - t_0)}{T}.$$

Равносильность двух записей выражается соотношением

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{r_0^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi}{T},$$

или

$$\frac{r_0^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2}.$$

Это равенство связано с *третьим законом Кеплера:* его левая часть зависит от планеты, а правая постоянна в Солнечной системе.

Если бы Земля двигалась вокруг Солнца по окружности, то естественно было бы принять за r_0 *среднее расстояние от Земли до Солнца* (называемое также *астрономической единицей*), приближённо равное *полтораста миллионов километров*, или

$$r_0 = 1.5 \cdot 10^{11}\text{м};$$

это даёт для *года* значение

$$T = 2\pi \frac{r_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\gamma}} \approx 2\pi \frac{(1.5 \cdot 10^{11}\text{м})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1.327 \cdot 10^{20} \frac{\text{м}^3}{\text{сек}^2}}} = 2\pi \frac{(1.5 \cdot 10^{11})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1.327 \cdot 10^{20}}}\text{сек} \approx$$

$$\approx 3.136 \cdot 10^7\text{сек} \approx 5.227 \cdot 10^5 \text{ мин} \approx 8712.569 \text{ час} \approx 363.023 \text{ суток},$$

в хорошем согласии с нашими знаниями о мире. Проведённая прикидка подтверждает, что реальное движение Земли вокруг Солнца достаточно близко к круговому.

1.3. Общие решения уравнений Кеплера. Как мы знаем из теоремы существования и единственности решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, множество всех решений 4-мерно; как мы вскоре увидим, общие решения этих уравнений Кеплера-Ньютона – в некотором смысле возмущения круговых и тоже *периодичны*. Сейчас они будут полностью описаны, хотя для некруговых решений x и y не могут быть выражены в виде известных функций от t.

Причина того, что уравнений Кеплера удаётся проинтегшрировать, заключается в их *симметриях*. Действительно, на множестве решений уравнений **(1.1.1), (1.1.2)** действуют три группы:

сдвиги по времени $(x(t), y(t)) \mapsto (x(t-t_0), y(t-t_0)$;
повороты $(x, y) \mapsto (\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y, -\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y)$;
масштабные преобразования $(x(t), y(t)) \mapsto (Rx(\frac{t}{R^{\frac{3}{2}}}), Ry(\frac{t}{R^{\frac{3}{2}}})$.

1.4. Секториальная скорость. [1] Вращения, как и всякая группа симметрий системы дифференциальных уравнений, определяют (по теореме Э.Нётер...) *интеграл*– в данном случае величину

$$\Sigma := x\dot{y} - \dot{x}y,$$

очевидно сохраняющуюся в силу уравнений **(1.1.1), (1.1.2).**

1.5. Переход к полярным координатам. Введя обычные обозначения

$$x = r\cos\phi, \;\; y = r\sin\phi, \qquad (\mathbf{1.5.1})$$

вычислим

$$\Sigma = r^2\dot{\phi}; \qquad (\mathbf{1.5.2})$$

сами уравнения **(1.1.1), (1.1.2)** принимают вид

$$\begin{cases} \ddot{r}\cos\phi - 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi - r\ddot{\phi}\sin\phi = -\gamma\dfrac{\cos\phi}{r^2} & (\mathbf{1.5.3}) \\ \ddot{r}\sin\phi + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi - r\dot{\phi}^2\sin\phi + r\ddot{\phi}\cos\phi = -\gamma\dfrac{\sin\phi}{r^2}. & (\mathbf{1.5.4}) \end{cases}$$

[1] во многих книгах используется непонятное для немехаников словосочетание *кинетический момент*

1.6. Разделение переменных. Комбинация $\cos\phi\cdot(\mathbf{1.5.3})+\sin\phi\cdot(\mathbf{1.5.4})$ даёт

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\gamma}{r^2}, \qquad (\mathbf{1.6.1})$$

или, с учётом **(1.5.2)**,

$$\ddot{r} = \frac{\Sigma^2}{r^3} - \frac{\gamma}{r^2}. \qquad (\mathbf{1.6.2})$$

1.7. Интеграл энергии. Уравнения типа **(1.6.2)** изучаются в курсе теоретической механики под названием *механическая система с одной степенью свободы.* Эти системы обладают интегралом *(эффектвной???) энергии* – в данной случае величиной

$$E := \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\Sigma^2}{2r^2} - \frac{\gamma}{r}, \qquad (\mathbf{1.7.1})$$

сохраняющейся в силу **(1.6.2)**. Последнее соотношение разрешается относительно $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}},$$

и мы получаем выражение для "дифференциала времени"

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}}. \qquad (\mathbf{1.7.2})$$

1.8. Наша первая риманова поверхность. Здесь мы готовы вспомнить о предмете нашего курса: введя *конику,* заданную соотношением

$$\frac{1}{\rho^2} = 2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}, \qquad (\mathbf{1.8.1})$$

мы можем (с точностью до константы) выразить время как *интеграл от рациональной формы на римановой поверхности*: соотношение (1.10) переписывается в виде

$$t = \int \rho \mathrm{d}r, \qquad (\mathbf{1.8.2})$$

где ρ и r связаны уравнением

$$\frac{1}{\rho^2} + (\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma})^2 = 2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}. \qquad (\mathbf{1.8.3})$$

Наша коника допускает *рациональную параметризацию* (вспомните тангенс половинного аргумента или формулу для пифагоровых троек):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho\sqrt{2E+\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}} = \dfrac{1-T^2}{1+T^2} & (\mathbf{1.8.4}) \\ \dfrac{\frac{\Sigma}{r}-\frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E+\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}} = \dfrac{2T}{1+T^2}. & (\mathbf{1.8.5}) \end{cases}$$

1.9. Интегрирование дифференциала времени. Прямые вычисления показывают

$$\mathrm{d}t =_{(1.8.2)} \rho \mathrm{d}r =_{(1.8.4),(1.8.5)}= \frac{2\Sigma^3(1+T^2)}{[\gamma(1+T^2)+2T\sqrt{\gamma^2+2E\Sigma^2}]^2}\mathrm{d}T. \qquad (\mathbf{1.9.1})$$

Вводя *безразмерный* параметр (геометрический смысл которого вскоре станет ясен)

$$\epsilon := \sqrt{1+\frac{2E\Sigma^2}{\gamma^2}} \qquad (\mathbf{1.9.2})$$

и выражая через него энергию

$$E = -\frac{1}{2}(1-\epsilon^2)\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}, \qquad (\mathbf{1.9.3})$$

переписываем *дифференциал обезрамеренного времени* в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}\mathrm{d}t =_{(1.9.1),(1.9.3)} \frac{1+T^2}{(1+2\epsilon T+T^2)^2}\mathrm{d}T \qquad (\mathbf{1.9.4})$$

и берём стандартный интеграл: с точностью до константы

$$\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}t =_{(1.9.4)} \int \frac{1+T^2}{(1+2\epsilon T+T^2)^2}\mathrm{d}T =$$

$$= \int \frac{1+2\epsilon T+T^2-2\epsilon T}{(1+2\epsilon T+T^2)^2}\mathrm{d}T = \int \frac{\mathrm{d}T}{1+2\epsilon T+T^2} - 2\epsilon \int \frac{T\mathrm{d}T}{(1+2\epsilon T+T^2)^2} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(T+\epsilon)}{1-\epsilon^2+(T+\epsilon)^2} - 2\epsilon \int \frac{(T+\epsilon)\mathrm{d}T - \epsilon \mathrm{d}T}{[1-\epsilon^2+(T+\epsilon)^2]^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{T+\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 2\epsilon \int \frac{(T+\epsilon)\mathrm{d}(T+\epsilon)}{[1-\epsilon^2+(T+\epsilon)^2]^2} +$$

$$+2\epsilon^2 \int \frac{\mathrm{d}(T+\epsilon)}{[1-\epsilon^2+(T+\epsilon)^2]^2} =_{T+\epsilon =: \sqrt{1-\epsilon^2}\tau}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \operatorname{arctg} \tau - \frac{2\epsilon}{1-\epsilon^2} \int \frac{\tau \mathrm{d}\tau}{(1+\tau^2)^2} + \frac{2\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{\mathrm{d}\tau}{(1+\tau^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \operatorname{arctg} \tau + \frac{\epsilon}{1-\epsilon^2} \frac{1}{1+\tau^2} + \frac{\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{1+\tau^2} + \operatorname{arctg} \tau \right) =$$

$$= \frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \tau + \frac{\epsilon}{1-\epsilon^2} \frac{1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\tau}{1+\tau^2}. \qquad (\mathbf{1.9.5})$$

Окончательно

$$t = t_0 + \frac{2\Sigma^2}{\gamma^2} \left[\frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \tau + \frac{\epsilon}{1-\epsilon^2} \frac{1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\tau}{1+\tau^2} \right], \qquad (\mathbf{1.9.6})$$

где

$$r =_{(1.8.5)} \frac{\Sigma^2}{\gamma} \frac{1+T^2}{1+2\epsilon T+T^2}, T+\epsilon = \sqrt{1-\epsilon^2}\tau. \qquad (\mathbf{1.9.7})$$

Таким образом, нам удалось выразить ВРЕМЯ t, и как элементарную функцию от вспомогательного параметра τ. Однако разрешить это соотношение в элементарных функциях невозможно. Время – ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ХИМЕРА!

1.10. Угловое "время". К счастью, "угловое время" ϕ ведёт себя лучше. Переписывая (1.5.2) в виде

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\Sigma}{r^2}, \qquad (\mathbf{1.10.1})$$

преобразуем (1.7.2) к

$$\frac{r^2 \mathrm{d}\phi}{\Sigma} = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}}, \qquad (\mathbf{1.10.2})$$

или

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\Sigma \mathrm{d}r}{r^2 \sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}} = -\frac{\Sigma \mathrm{d}\frac{1}{r}}{\sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}} = -\frac{\Sigma \mathrm{d}\frac{1}{r}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{J^2} - (\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{J})^2}} =$$

$$= -\frac{\mathrm{d}(\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma})}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2} - (\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma})^2}} = \mathrm{d}\arccos\frac{\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}}. \qquad (\mathbf{1.10.3})$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$\phi - \phi_0 = \arccos\frac{\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}},$$

или

$$\cos(\phi - \phi_0) = \frac{\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}},$$

или

$$\frac{\gamma}{\Sigma} + \sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}\cos(\phi - \phi_0) = \frac{\Sigma}{r},$$

откуда

$$r = \frac{\Sigma}{\frac{\gamma}{\Sigma} + \sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}\cos(\phi - \phi_0)} = \frac{\frac{\Sigma^2}{\gamma}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E\Sigma^2}{\gamma^2}}\cos(\phi - \phi_0)}. \qquad (\mathbf{1.10.4})$$

Это – *уравнение эллипса* в полярных координатах, и мы вывели *первый закон Кеплера* из закона Всемирного Тяготения. Наш обезразмеривающий время параметр ϵ, таким образом – *эксцентриситет* эллиптической орбиты планеты.

Вводя

$$r_0 := \frac{\Sigma^2}{\gamma} \qquad (\mathbf{1.10.5})$$

и пользуясь введённым выше

$$\epsilon := \sqrt{1 + \frac{2E\Sigma^2}{\gamma^2}},$$

переписываем (**1.10.4**) в виде

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon\cos(\phi - \phi_0)}. \qquad (\mathbf{1.10.6})$$

1.11. Ответ. Прямые вычисления показывают, что $\phi-$динамика в расширенном фазовом пространстве выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x = \dfrac{r_0 \cos\phi}{1+\epsilon\cos(\phi-\phi_0)} & (\mathbf{1.11.1}) \\ y = \dfrac{r_0 \sin\phi}{1+\epsilon\cos(\phi-\phi_0)} & (\mathbf{1.11.2}) \\ \dot{x} = \sqrt{\dfrac{\gamma}{r_0}}(-\sin\phi - \epsilon\sin\phi_0) & (\mathbf{1.11.3}) \\ \dot{y} = \sqrt{\dfrac{\gamma}{r_0}}(\cos\phi + \epsilon\cos\phi_0) & (\mathbf{1.11.4}) \end{cases}$$

Связь времён:

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\phi}{[1+\epsilon\cos(\phi-\phi_0)]^2} \qquad (\mathbf{1.11.5})$$

1.12. Пройденный путь. Как обычно,

$$\mathrm{d}s := \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\mathrm{d}t =_{(1.11.3),(1.11.4)} \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}}\sqrt{1+2\epsilon\cos(\phi-\phi_0)+\epsilon^2}\mathrm{d}t =_{(1.11.5)}$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}}\sqrt{1+2\epsilon\cos(\phi-\phi_0)+\epsilon^2}\sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}}\frac{\mathrm{d}\phi}{[1+\epsilon\cos(\phi-\phi_0)]^2} =$$

$$= r_0 \frac{\sqrt{1+2\epsilon\cos(\phi-\phi_0)+\epsilon^2}}{[1+\epsilon\cos(\phi-\phi_0)]^2}\mathrm{d}\phi. \qquad (\mathbf{1.12.1})$$

Введя

$$\xi := -\cos(\phi-\phi_0), \qquad (\mathbf{1.12.2})$$

получим

$$\frac{\mathrm{d}s}{r_0} = \frac{\sqrt{1-2\epsilon\xi+\epsilon^2}}{(1-\epsilon\xi)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}. \qquad (\mathbf{1.12.3})$$

На МАЛОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

$$\zeta^2 = (1-\xi^2)(1+\epsilon^2-2\epsilon\xi) \qquad (\mathbf{1.12.4})$$

имеем

$$\mathrm{d}s = r_0 \cdot \frac{1-2\epsilon\xi+\epsilon^2}{(1-\epsilon\xi)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\xi}{\zeta}. \qquad (\mathbf{1.12.4})$$

1.13. Другие величины. Имеем

$$\mathrm{d}\phi =_{(1.12.2)} -\mathrm{d}\arccos\xi = \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}. \qquad (\mathbf{1.13.1})$$

Этот дифференциал иррационален на малой римановой поверхности, поэтому введём ещё

$$\eta := \arcsin(\phi - \phi_0) \qquad (\mathbf{1.13.2})$$

и БОЛЬШУЮ РИМАНОВУ ПОВЕРХНОСТЬ, определяемую в трёхмерном (ξ, η, ζ)-пространстве соотношениями

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = 1 & (\mathbf{1.13.3}) \\ \zeta^2 = (1-\xi^2)(1+\epsilon^2 - 2\epsilon\xi). & (\mathbf{1.13.4}) \end{cases}$$

На этой римановой поверхности дифференциалы всех рассмотренных величин рациональны:

$$\mathrm{d}\phi =_{(1.13.1),(1.13.3)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\eta}, \qquad (\mathbf{1.13.5})$$

$$\mathrm{d}t =_{(1.11.5)} \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\phi}{[1+\epsilon\cos(\phi-\phi_0)]^2} =_{(1.12.2),(1.13.5)}$$

$$= \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}} \cdot \frac{\mathrm{d}\xi}{\eta(1-\epsilon\xi)^2}, \qquad (\mathbf{1.13.6})$$

$$\mathrm{d}r =_{(1.10.6)} \mathrm{d}\frac{r_0}{1+\epsilon\cos(\phi-\phi_0)} = r_0 \mathrm{d}\frac{1}{1-\epsilon\xi} =$$

$$= \epsilon r_0 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\epsilon\xi)^2}; \qquad (\mathbf{1.13.7})$$

с помощью этих соотношений легко выразить также и дифференциалы исходных координат $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ в расширенном фазовом пространстве. Развив соответствующий аппарат, Мы вернёмся в последующих лекциях к анализу этих дифференциалов и к их интегрированию.

ДЛИНА ДУГИ ЭЛЛИПСА

Сравняться с зимним днём,
С его пустым овалом,
И быть всегда при нём
Его оттенком малым.

Б. Ахмадуллина

1.14. Тригонометрическая параметризация. Рассмотрим эллипс, заданный стандартным уравнением

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1; \qquad (\mathbf{1.14.1})$$

дифференциал длины его дуги имеет вид

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}X)^2 + (\mathrm{d}Y)^2} \qquad (\mathbf{1.14.2}).$$

Воспользовавшись тригонометрической параметризацией

$$X = a\cos T,\ Y = b\sin T, \qquad (\mathbf{1.14.3})$$

получим

$$s = \int \sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}\mathrm{d}T. \qquad (\mathbf{1.14.4})$$

Это – (неполный) *интеграл Лежандра второго рода* в тригонометрической форме, за века тщательно изученный и затабулированный.

1.15. Переход на риманову поверхность. Сведём рассматриваемый интеграл к обсуждавшемуся выше виду. Введём

$$Z := \sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T} \qquad (\mathbf{1.15.1})$$

и отметим тождество

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 + b^2, \qquad (\mathbf{1.15.2})$$

так что вещественная часть нашей кривой реализована как пересечение сферы с эллиптическим цилиндром. Поскольку

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}\,\mathrm{arctg}\,\frac{aY}{bX} = \frac{a}{b}\frac{\mathrm{d}\frac{Y}{X}}{1+\frac{a^2}{b^2}\frac{Y^2}{X^2}} = \frac{a}{b}\frac{X\mathrm{d}Y - Y\mathrm{d}X}{X^2+\frac{a^2}{b^2}Y^2}, \qquad (\mathbf{1.15.3})$$

а дифференциал равенства **(1.14.1)** имеет вид

$$\frac{2}{a^2}X\mathrm{d}X + \frac{2}{b^2}Y\mathrm{d}Y = 0, \qquad (\mathbf{1.15.4})$$

дифференциал длины (с подходящим знаком) переписывается как

$$\mathrm{d}s =_{(1.14.4)} -Z\mathrm{d}T =_{(1.15.3),(1.15.4)} -Z\frac{a}{b}\frac{X\frac{-b^2X}{a^2Y}\mathrm{d}X - Y\mathrm{d}X}{X^2 + \frac{a^2}{b^2}Y^2} =$$

$$= \frac{Z}{Y}\frac{a}{b}\frac{\frac{b^2X^2}{a^2} + Y^2}{X^2 + \frac{a^2}{b^2}Y^2}\mathrm{d}X = \frac{b}{a}\frac{Z\mathrm{d}X}{Y}. \qquad (\mathbf{1.15.5})$$

1.16. Дифференциал длины на лежандровой кривой. Перепишем дифференциал длины в виде

$$ds = \sqrt{1 + (\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X})^2}\mathrm{d}X =_{(1.15.4)}= \sqrt{1 + \frac{b^4}{a^4}\frac{X^2}{Y^2}}\mathrm{d}X = \sqrt{1 + \frac{b^4}{a^4}\frac{X^2}{b^2(1 - \frac{X^2}{a^2})}}\mathrm{d}X =$$

$$= \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)X^2}{a^2(a^2 - X^2)}}\mathrm{d}X. \qquad (\mathbf{1.16.1})$$

Вводя

$$\frac{X}{a} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2},\ \ \frac{Y}{b} = \frac{2u}{1 + u^2}, \qquad (\mathbf{1.16.2})$$

– эта параметризация связана с предыдущей соотношением

$$u = \mathrm{tg}\,\frac{T}{2} \qquad (\mathbf{1.16.3})$$

– переписываем уравнение сферы **(1.15.2)** в виде

$$Z^2 = a^2 + b^2 - a^2\frac{(1 - u^2)^2}{(1 + u^2)^2} - 4b^2\frac{u^2}{(1 + u^2)^2}, \qquad (\mathbf{1.16.4})$$

или

$$[Z(1 + u^2)]^2 = (a^2 + b^2)(1 + u^2)]^2 - a^2(1 - u^2)^2 - 4b^2u^2 =$$

$$= b^2 + (4a^2 - 2b^2)u^2 + b^2u^4, \qquad (\mathbf{1.16.5})$$

или

$$[\frac{Z(1 + u^2)}{b}]^2 = 1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4. \qquad (\mathbf{1.16.6})$$

Введя
$$v := \frac{Z(1+u^2)}{b}, \qquad \textbf{(1.16.7)}$$
мы обнаружим, что оказались на *лежандроподобной* кривой, заданной уравнением
$$v^2 = 1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4; \qquad \textbf{(1.16.7)}$$
это (нетрадиционное) название связано с тем, что *лежандровой* кривой принято называть кривую, заданную уравнением
$$v^2 = (1-u^2)(1-k^2u^2); \qquad \textbf{(1.16.8)}$$
параметр k называется *модулем* лежандровой кривой. Очевидно, наша лежандроподобная кривая приводится к стандартному лежандрову виду простыми масштабными преобразованиями.

Отметим, что Эйлер и Гаусс особенно интересовались интегралами на кривой
$$v^2 = 1 - u^4, \qquad \textbf{(1.16.9)}$$
который соответствует модулю $k = \mathrm{i}$ и случаю $b^2 = 2a^2$, т.е. эллипсу, у которого одна из полуосей в $\sqrt{2}$ раз больше другой (с последующей *мнимой* заменой переменной $u \longleftarrow \mathrm{i}u$).

Факт. *Дифференциал длины дуги* (с точностью до знака) *на кривой* $v^2 = 1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4$ *имеет вид*
$$-\mathrm{d}s = 2b\frac{v\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} \qquad \textbf{(1.16.10)}$$

Проверка. Вычисляем
$$-\mathrm{d}s =_{(1.15.5)} -\frac{b}{a}\frac{Z\mathrm{d}X}{Y} =_{(1.16.1)} -\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)X^2}{a^2(a^2-X^2)}}\mathrm{d}X =_{X=_{(1.16.2)}a\frac{1-u^2}{1+u^2}}$$
$$= -a\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)a^2\frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}}{a^2(a^2-a^2\frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2})}}\mathrm{d}\frac{1-u^2}{1+u^2} =$$
$$= 4a\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b^2)\frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}}{a^2-a^2\frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}}}\frac{u\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} = 4\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b^2)\frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}}{1-\frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}}}\frac{u\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{a^2(1+u^2)^2-(a^2-b^2)(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2-(1-u^2)^2}}\frac{u\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} =$$

$$= 2\sqrt{a^2(1+u^2)^2-(a^2-b^2)(1-u^2)^2}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} =$$

$$= 2\sqrt{b^2+(4a^2-2b^2)u^2+b^2u^4}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} =$$

$$= 2b\sqrt{1+(4\frac{a^2}{b^2}-2)u^2+u^4}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} =_{(1.16.7)} 2b\frac{v\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}. \qquad \blacksquare$$

1.17. Длина эллипса как период рационального дифференциала на лежандровой кривой. Определим

$$\mathrm{Len}(a,b) := \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}\mathrm{d}T =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}\mathrm{d}T =_{(1.16.2),(1.16.10)} 2b\int_{-1}^{1} \frac{v\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}. \quad (\mathbf{1.17.1})$$

Это – определённый интеграл от рационального дифференциала на кривой, которой мы теперь дадим (временное) имя:

$$\ddot{\mathbf{X}}(a,b): \quad v^2 = 1+(4\frac{a^2}{b^2}-2)u^2+u^4 \qquad (\mathbf{1.17.2})$$

(объяснение двум точкам $\ddot{\mathbf{X}}$ над $\mathbf{X}$ будет дано ниже).

В самодостаточном вещественном виде

$$\mathrm{Len}(a,b) := 2b\int_{-1}^{1} \sqrt{1+(4\frac{a^2}{b^2}-2)u^2+u^4}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}; \qquad (\mathbf{1.17.3})$$

замена переменных (отражающая симметрию эллипса) в части этого интеграла

$$\int_0^1 \sqrt{1+(4\frac{a^2}{b^2}-2)u^2+u^4}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} =_{u=\frac{1}{\hat u}}$$

$$= \int_\infty^1 \sqrt{1+\frac{4\frac{a^2}{b^2}-2}{\hat u^2}+\frac{1}{\hat u^4}}\frac{-\frac{\mathrm{d}\hat u}{\hat u^2}}{(1+\frac{1}{\hat u^2})^2} =_{\hat u \longleftarrow u}$$

$$= \int_1^\infty \sqrt{1 + \frac{4\frac{a^2}{b^2} - 2}{u^2} + \frac{1}{u^4}} \frac{\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{(1+\frac{1}{u^2})^2} = \int_1^\infty \sqrt{1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}$$

позволяет переписать длину эллипса в виде

$$\mathrm{Len}(a,b) := b\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} \qquad (\mathbf{1.17.4})$$

или (пока символически)

$$\mathrm{Len}(a,b) := b\oint_{\mathbf{X}(a,b)} \frac{v\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}. \qquad (\mathbf{1.17.5})$$

1.18. Длина эллипса как период рационального дифференциала на другой лежандровой кривой. Вычислим теперь длину эллипса иначе: введём

$$U := \operatorname{tg} T =_{(1.16.3)} \frac{2u}{1-u^2} \qquad (\mathbf{1.18.1})$$

и перепишем

$$\mathrm{Len}(a,b) := 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 T + b^2\cos^2 T}\mathrm{d}T =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2\operatorname{tg}^2 T + b^2}{\operatorname{tg}^2 T + 1}}\mathrm{d}T = 2\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{a^2U^2 + b^2}{1+U^2}} \frac{\mathrm{d}U}{U^2+1} =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{(U^2+1)(a^2U^2+b^2)}}{(U^2+1)^2}\mathrm{d}U =$$

$$= 2b\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{(1+U^2)(1+\frac{a^2}{b^2}U^2)}\mathrm{d}U}{(U^2+1)^2}. \qquad (\mathbf{1.18.1})$$

Введём теперь новую кривую

$$\ddot{\mathbf{Y}}(a,b): \quad V^2 = (1+U^2)(1+\frac{a^2}{b^2}U^2). \qquad (\mathbf{1.18.2})$$

С её помощью длина эллипса запишется в виде, совершенно аналогичном **(1.17.5)**:

$$\mathrm{Len}(a,b) := b\oint_{\mathbf{Y}(a,b)} \frac{V\mathrm{d}U}{(1+U^2)^2}. \qquad (\mathbf{1.18.3})$$

Формулы **(1.17.5)** и **(1.18.5)** различаются кривыми, по которым производится интегрирование, и множителем 2. Что же происходит?

1.19. Сравнение двух лежандровых кривых. Рассматриваемые нами кривые $\mathbf{X}(a,b)$ и $\mathbf{Y}(a,b)$ действительно *разные*! Их нельзя преобразовать друг в друга никакими разумными заменами переменных; точный смысл этому утверждению будит придан в следующей лекции.

Множитель 2 напоминает о том, что между кривыми $\mathbf{X}(a,b)$ и $\mathbf{Y}(a,b)$ имеется, тем не менее, тесная связь: одна из них *двулистно накрывает* другую. Этому утверждению точный смысл будет придан в лекции ???

Пока отметим не бросающееся в глаза соотношение между рассматриваемыми кривыми. Пусть даны *два* эллипса, причём полуоси одного из них являются *средними* – арифметическим и геометрическим – полуосей другого:

$$a = \frac{A+B}{2}, \quad b = \sqrt{AB} \tag{\mathbf{1.19.1}}$$

Тогда уравнение кривой $\ddot{\mathbf{X}}(a,b)$ преобразуется как

$$v^2 = 1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4 = 1 + [\frac{(A+B)^2}{AB} - 2]u^2 + u^4$$

$$= 1 + \frac{A^2+B^2}{AB}u^2 + u^4 \tag{\mathbf{1.19.2}}$$

Перемасштабирование $u = \sqrt{\frac{B}{A}}\hat{u}$ приводит эту кривую к виду

$$v^2 = 1 + \frac{A^2+B^2}{AB}\frac{B}{A}\hat{u}^2 + \frac{B^2}{A^2}\hat{u}^4 = 1 + \frac{A^2+B^2}{A^2}\hat{u}^2 + \frac{B^2}{A^2}\hat{u}^4 =$$

$$= (1+\hat{u}^2)(1+\frac{B^2}{A^2}\hat{u}^2) \tag{\mathbf{1.19.3}}$$

Это – уравнение кривой $\ddot{\mathbf{Y}}(A,B)$! Мы обнаружили, таким образом, что

$$\mathbf{Y}(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) \simeq \mathbf{X}(a,b). \tag{\mathbf{1.19.4}}$$

Значку $\simeq$, имеющему смысл *изоморфизма кривых*, будет придан точный смысл в лекции ??. Сам изоморфизм (в историческом контексте) будет обсуждаться в лекции 3.

1.20. Канонический лежандров вид. Приведём, наконец, рассмотренные кривые и интегралы к стандартному виду.

Введя (снова) эксцентриситет исходного эллипса

$$\epsilon := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},^{2} \qquad (\mathbf{1.20.1})$$

выразим с его помощью одну полуось через другую

$$b = \sqrt{1 - \epsilon^2}a \qquad (\mathbf{1.20.2})$$

и перепишем уравнения наших (с Ньютоном...) кривых:

$$\ddot{\mathbf{X}}(a,b): \quad v^2 =_{(1.17.2)} 1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4 = 1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4 =$$

++

и "модуль"

$$k := \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}, \qquad (\mathbf{1.20.2})$$

[2] *скругление*: $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \mapsto \sqrt{1 - \frac{\sqrt{ab}^2}{(\frac{a+b}{2})^2}} = \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}$.