Комбинаторное введение в геометрическую топологию

Лектор: Сергей Александрович Мелихов

В начальной части курса планируется изложить современные основания комбинаторной топологии, включая теорему кусочно-линейной трансверсальности и (во многом новый) формализм конических комплексов, объединяющий симплициальную и кубическую точки зрения и дающий чисто комбинаторную интерпретацию некоторых известных результатов. Далее кусочно-линейная техника иллюстрируется на некоторых простейших сюжетах из маломерной топологии и на начальных результатах геометрического подхода к гомотопическим группам (сфер и 2-мерных полиэдров), основанного на полиэдральной конструкции Понтрягина.

Основная часть курса посвящена изложению геометрического подхода к (ординарным и экстраординарным) гомологиям и когомологиям, характеристическим классам, и так далее, основанного на понятии комногообразия (mock bundle). В отличие от стандартного подхода, излагаемого в сотнях учебников по алгебраической топологии, эта геометрическая точка зрения на гомологии и когомологии подробно представлена лишь в двух источниках: R. Fenn «Techniques of geometric topology» (Chapter 1) и S. Buoncristiano, C. Rourke, B. Sanderson «A geometric approach to homology theory», из которых первый содержит наглядные иллюстрации, а второй – систематическое изложение, но оба, к сожалению, не претендуют на элементарность. В конце курса планируется обсудить применения этой геометрически понятой алгебраической техники в теории вложений и к другим геометрическим задачам.

Если останется время, можно обсудить применение развитых методов к общим (точнее, сепарабельным метризуемым полным равномерным) пространствам. В основной части курса никакие понятия общей топологии не используются.

Курс должен быть доступен для понимания студентам младших курсов, имеющим нулевое или минимальное знакомство с топологией (например, по книге Болтянского, Ефремовича «Наглядная топология» или по книге Прасолова с тем же названием) но может быть интересен и аспирантам, уже хорошо владеющим аппаратом алгебраической топологии.

Программа курса (предварительная версия)

0. Введение: некоторые открытые проблемы в теории узлов и 4-мерной топологии.
1. Начала кусочно-линейной топологии (симплициальные комплексы, конечномерные полиэдры, измельчения).
2. Комбинаторика кусочно-линейной топологии: новые основания (конические комплексы, равномерные полиэдры, комбинаторные операции и изоморфизмы, двойственность ван Кампена, каноническое измельчение, кубические комплексы, конструкция Дранишникова).

3. Комбинаторные многообразия. Сдавливание. Регулярные окрестности. Кусочно-линейная трансверсальность. Комногообразия (mock bundles).

4. Коэффициент зацепления. Тройной μ-инвариант. Степень отображения. Конфигурационные пространства. Тройной μ-инвариант как степень отображения.

5. Фундаментальная группа. Свободная группа. Копредставления. Диаграммы сокращений. Копредставление Виртингера. Группа Милнора. Тройной μ-инвариант как коэффициент при коммутаторе.

6. Конструкция Понтрягина. Геометрическое вычисление $\pi_3(S^2)$, $\Pi_4(S^3)$, $\pi_3(S^2 \vee S^2)$. Тройной μ-инвариант как коэффициент при произведении Уайтхеда.

7. Геометрическая теория гомологий и когомологий. Стабильные когомотопии. Бордизмы и кобордизмы. Псевдо(ко)многообразия. Ординарные гомологии и когомологии. $\cup$- и $\cap$-умножения, трансфер, эйлеров класс комногообразия. Точные последовательности Смита. Двойственность Пуанкаре (и Александера). Цепные комплексы и алгебраическое вычисление ординарных (ко)гомологий.

8. Характеристические классы и когомологические операции (геометрический подход). Тройной μ-инвариант как произведение Масси. Операции Стинрода и классы Штифеля–Уитни. Операции том Дика и классы Коннера–Флойда. Стинродовы квадраты как двойные точки (или особые точки) отображения общего положения. Некоторые результаты о (не)вложимости и (не)погрузимости многообразий и полиэдров.

9*. Стинродовские гомотопии и понтрягинская К-теория. 3-мерная гипотеза Гильберта–Смита.